Q
56
S7

Annales de la
SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
de Bruxelles

Association sans but lucratif

TOME SOIXANTE-ET-ONZIÈME

SÉRIE I

SCIENCES MATHÉMATIQUES
ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

PREMIER FASCICULE
22 MARS 1957

Publié avec le concours de la Fondation universitaire de Belgique et du Gouvernement

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1957

Publication trimestrielle. Prix de ce fascicule séparé : 60 frs

AVIS

Les périodiques internationaux de références et de bibliographie sont autorisés à reproduire, moyennant une référence, les résumés que les auteurs placent en tête de leurs travaux dans ces *Annales*.

TABLE DES MATIÈRES

Manuscrits reçus avant le 31 janvier 1957.

PREMIÈRE SECTION : **Sciences mathématiques et astronomiques**

Quelques classes d'homomorphismes dans des espaces vectoriels, par A. DEPRIT 5

DEUXIÈME SECTION : **Sciences physiques et chimiques**

Effet de la dissymétrie Est-Ouest sur la répartition des branches rapides des étoiles produites dans les émulsions nucléaires par les rayons cosmiques, par Max MORAND, C. BEETS, Y. ROBINET et L. WINAND. 44

Sur le mécanisme de dissociation des formes isomères du butène sous l'impact électronique, par L. D'OR, J. C. LORQUET et F. MOMIGNY. 53

Etude du spectre de masse du bromocyclopentane et des trois bromo-n-pentanes, par L. D'OR, H. HEYNS et J. MOMIGNY 61

Comportement du fluorobenzène et du paradeutérofluorobenzène sous l'impact électronique, par J. MOMIGNY 66

Le prix d'ABONNEMENT aux ANNALES, série I, pour des personnes ne faisant pas partie de la Société scientifique, est fixé comme suit :

en Belgique, au Congo-Belge et au Luxembourg 100 F

dans les autres pays 150 F

1127-25

MANUSCRITS REÇUS AVANT LE 31 JANVIER 1957

Première Section

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Quelques classes d'homomorphismes dans des espaces vectoriels

PAR

ANDRÉ DEPRIT

Traitant d'applications linéaires continues d'un espace de Banach dans un espace de Banach, B. Yood a spécialement considéré le cas d'applications linéaires continues ouvertes ayant soit un noyau de dimension finie (homomorphismes ayant la propriété A) soit une image de codimension finie (homomorphisme ayant la propriété B). Il a aussi énoncé quelques propositions sur les endomorphismes d'un espace de Banach ayant les propriétés A et B et tels que les suites finies des noyaux et des images de leurs itérés soient composées chacune d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels distincts [6].

Elargissant une proposition obtenue par L. Schwartz [5], G. Köthe établit une proposition concernant la somme d'un homomorphisme f à noyau de dimension finie d'un espace localement convexe E dans un autre espace localement convexe F et d'un homomorphisme de rang fini de E dans F. Pour le cas où E et F sont des espaces de Fréchet, il formule une proposition analogue, mais dans l'hypothèse où f a une image fermée et de codimension finie [3].

De son côté, H. Schaefer étudie les propriétés élémentaires des homomorphismes d'un espace localement convexe E dans un espace localement convexe F, ayant un noyau de dimension et une image fermée de codimension finie (σ-homomorphismes) [4].

Enfin, pour généraliser la théorie de Riesz sur des endomorphismes compacts d'un espace de Banach, on a étudié, dans les

espaces localement convexes, les propriétés élémentaires d'endomorphismes ayant un noyau de dimension finie, dont la suite des noyaux itérés est composée d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels distincts et dont la suite des images itérées est faite d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels fermés distincts [1].

L'intention, ici, est d'étudier systématiquement, dans la ligne des publications de M. Hukuhara [2], des propriétés d'homomorphismes analogues, et cela dans un contexte purement algébrique. De la sorte, on prépare la voie à une étude systématique des divers endomorphismes et homomorphismes introduits, par les auteurs cités plus haut, dans les espaces localement convexes. Cette note se doublera donc d'un article qui traitera de types particuliers d'applications linéaires continues dans de tels espaces.

Soit Λ un corps commutatif.

Soit A un espace vectoriel sur Λ. Si C et D sont deux sous-espaces vectoriels de A, la somme directe (algébrique) de C et de D, si elle existe, est représentée par $C \oplus D$; on dit alors que C (resp. D) est un supplémentaire (algébrique) de D (resp. C) dans $C \oplus D$.

Soit B un espace vectoriel sur Λ et f un homomorphisme de A dans B.

$\mathrm{Ker}\,(f)$ représente le *noyau* de f dans A, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel de A, composé de tous les $x \in A$ tels que $f(x) = 0$. $\mathrm{Im}\,(f)$ représente l'*image* de f dans B, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel de B, composé de tous les éléments de la forme $f(x)$, $x \in A$.

f induit un isomorphisme de $A/\mathrm{Ker}\,(f)$ sur $\mathrm{Im}\,(f)$.

PROPOSITION 1 — *Soit* A, B *et* C *trois espaces vectoriels sur un corps commutatif* Λ, f *un homomorphisme de* A *dans* B *et* g *un homomorphisme de* B *dans* C. *On peut choisir deux sous-espaces vectoriels* A_2 *et* A_3 *de* A *de telle façon que*

a) $A = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus A_2 \oplus A_3$;

b) $\mathrm{Ker}\,(g \circ f) = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus A_2$;

c) $\mathrm{Im}\,(g \circ f) = g\,(f(A_3))$.

En effet, soit A_1 un sous-espace vectoriel de A, tel que $A = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus A_1$. f induit un isomorphisme φ de A_1 sur $\mathrm{Im}\,(f)$; ψ désigne l'isomorphisme de $\mathrm{Im}\,(f)$ sur A_1, réciproque de φ.

$\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im}\,(f)$. On

pose $A_2 = \psi(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g))$. Soit A_3 un supplémentaire de A_2 dans A_1. Par définition, A_2 et A_3 vérifient la condition *a*).

De plus, puisque φ est un isomorphisme de A_1 sur $\mathrm{Im}(f)$, $f(A_3) = \varphi(A_3)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ dans $\mathrm{Im}(f)$. Or $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$. D'autre part $A_2 \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$: car, si $x \in A_2$, $f(x) \in \mathrm{Ker}(g)$ et $g(f(x)) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(f) \oplus A_2 \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$. Réciproquement, quel que soit $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$, il se décompose d'une manière et d'une seule en la somme $x = x_k + x_2 + x_3$ avec $x_k \in \mathrm{Ker}(f)$, $x_2 \in A_2$ et $x_3 \in A_3$. D'où $g(f(x)) = g(f(x_3)) = 0$. Si l'on prouve que la restriction de g à $f(A_3)$ est un monomorphisme de $f(A_3)$ dans $\mathrm{Im}(g)$, alors $f(x_3) = 0$ et, puisque f est un isomorphisme de A_3 sur $f(A_3)$, $x_3 = 0$. On aura donc $x = x_k + x_2 \in \mathrm{Ker}(f) \oplus A_2$. Donc $\mathrm{Ker}(g \circ f) \subset \mathrm{Ker}(f) \oplus A_2$, ce qui achèvera de montrer que A_2 vérifie la condition *b*).

Or $f(A_3) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0\}$. Car, si y est un élément de cette intersection, $g(y) = 0$, et il existe au moins un $x_3 \in A_3$ tel que $f(x_3) = y$. D'où $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$; d'où il existe un x_2 et un seul dans A_2 tel que $f(x_2) = y$. C'est pourquoi $f(x_3 - x_2) = 0$. Alors $x_3 - x_2 \in (A_2 \oplus A_3 (\cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et $x_2 = x_3$. D'où $x_3 \in A_2 \cap A_3 = \{0\}$ et $x_3 = 0$, ce qui entraîne que $y = 0$. La relation $f(A_3) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0\}$ équivaut au fait que la restriction de g à $f(A_3)$ est un monomorphisme.

$(g \circ f)(A_3) = \mathrm{Im}(g \circ f)$. Car, si $z \in g \circ f$, il existe au moins un $x \in A$ tel que $g(f(x)) = z$. Mais x se décompose d'une manière et d'une seule en la somme $x = x_k + x_2 + x_3$ avec $x_k \in \mathrm{Ker}(f)$, $x_2 \in A_2$ et $x_3 \in A_3$. Alors $z = g(f(x)) = g(f(x_3)) \in g(f(A_3))$, ce qui montre que A_3 vérifie la condition *c*).

Remarques — 1) Si f est une application de rang $\rho(f)$ fini et si $g \circ f$ est une application de rang $\rho(g \circ f)$ fini,

$$\dim_B (\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) = \rho(f) - \rho(g \circ f).$$

2) Si B est de dimension finie n, f est une application de rang $\rho(f)$ fini de A dans B et g est une application de rang $\rho(g)$ fini de B dans C. Donc $g \circ f$ est une application de rang fini de A dans C. On a évidemment $g(f(A_3)) = \mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$, donc $\rho(g \circ f) \leqslant \rho(g)$. De plus $f(A_3)$ est isomorphe à $\mathrm{Im}(g \circ f)$ et contenu dans $\mathrm{Im}(f)$, donc $\rho(g \circ f) \leqslant \rho(f)$. Si $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$,

$f(A_3) = 0$ et $\rho(g \circ f) = 0$; par contre, si $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \neq \{0\}$, puisque $f(A_3)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ dans $\mathrm{Im}(f)$, $\rho(f) = \rho(f) + (n - \rho(g))$. D'où les inégalités

$$\mathrm{Max}(0, \rho(f) + \rho(g) - n) \leqslant \rho(g \circ f) \leqslant \mathrm{Min}(\rho(f), \rho(g)).$$

3) Soit A, B et C trois espaces vectoriels sur Λ, f un homomorphisme de A dans B, et h un homomorphisme de A dans C. Pour que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(h)$, il faut et il suffit qu'il existe un homomorphisme g de B dans C, tel que $h = g \circ f$.

D'après la proposition 1, la condition est évidemment suffisante. Elle est aussi nécessaire. Soit en effet A_2 un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans $\mathrm{Ker}(h)$, et soit A_3 un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(h)$ dans A. Soit φ l'isomorphisme réciproque de l'isomorphisme, induit par f, de A_3 sur $f(A_3)$, ψ l'isomorphisme induit par h sur A_3, B_1 un supplémentaire de $f(A)$ dans B, et p la projection de B dans B telle que $p(B) = f(A_3)$ et $\mathrm{Ker}(p) = B_1 \oplus f(A_2)$. $g = \psi \circ \varphi \circ p$ est une application linéaire de B dans C. Quel que soit $x \in A$, on a la décomposition $x = x_k + x_2 + x_3$ où $x_k \in \mathrm{Ker}, (f)$ $x_2 \in A_2$ et $x_3 \in A_3$. Alors $g(f(x)) = g(f(x_3)) = (\psi(\varphi(x_3)) = h(x_3) = h(x)$. Donc $h = g \circ f$.

1 — Homomorphismes a noyau de dimension finie

L (A, B) représente l'ensemble des homomorphismes de A dans B; c'est un espace vectoriel sur Λ. Si B = A, L (A) représente L (A, B); c'est une algèbre sur Λ.

F (A, B) représente l'ensemble des homomorphismes de rang fini de A dans B. C'est un sous-espace vectoriel de L (A, B). De plus, pour tout $f \in$ L (A, B), $g \in$ L (B, C), $h \in$ F (A, B) et $k \in$ F (B, C), $k \circ f \in$ F (A, C) et $g \circ h \in$ F (A, C). Si $f \in$ F (A, B), on pose $\rho(f) = \dim_B \mathrm{Im}(f)$. Lorsque B = A, F (A) représente F (A, B); F (A) est un idéal bilatère de L (A).

α (A, B) représente l'ensemble des homomorphismes de A dans B, dont le noyau est de dimension finie. Si B = A, α (A) représente α (A, A). Lorsque $f \in \alpha$ (A, B), on pose $k(f) = \dim_A \mathrm{Ker}(f)$.

Parmi les endomorphismes de A dans B dont le noyau est de dimension finie, on distingue l'ensemble μ (A, B) des monomorphismes de A dans B.

Evidemment $\alpha(A, B) = L(A, B)$ à la seule condition que A soit un espace vectoriel de dimension finie.

PROPOSITION 2 — *Pour tout* $f \in \alpha(A, B)$ *et* $g \in \alpha(B, C)$, $g \circ f \in \alpha(A, C)$ *et* $k(f) \leqslant k(g \circ f) \leqslant k(g) + k(f)$.

En effet, d'après la prop. 1, il existe deux sous-espaces vectoriels A_2 et A_3 tels que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f) \oplus A_2$ et $f(A_2) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$. D'où $\dim_B f(A_2) \leqslant k(g)$ et $k(f) \leqslant k(g \circ f) \leqslant k(f) + k(g)$.

COROLLAIRE 1 — *Quels que soient* $f \in L(A, B)$ *et* $g \in L(B, C)$, *la relation* $g \circ f \in \alpha(A, C)$ *entraîne la relation* $f \in \alpha(A, B)$ *et* $k(f) \leqslant k(g \circ f)$.

COROLLAIRE 2 — $\alpha(A)$ *est un semi-groupe multiplicatif de l'algèbre* $L(A)$. *Quel que soit* $n \in \mathbf{N}$, *pour tout* $f \in \alpha(A)$, *la relation* $g^n = f$ *entraîne* $g \in \alpha(A)$ *et* $k(g) \leqslant k(f) \leqslant n\,k(g)$.

PROPOSITION 3 — *Pour que* $f \in \alpha(A, B)$, *il faut et il suffit qu'il existe au moins un homomorphisme* h *de* B *dans* A *tel que* $h \circ f = a + p$, *où* a *désigne l'automorphisme identique de* A *et* p *un endomorphisme de rang fini de* A. *Dans ce cas* $k(f) \leqslant \rho(p)$.

La condition est nécessaire. Pour le prouver, on considère un supplémentaire A_1 de $\mathrm{Ker}(f)$ dans A et un supplémentaire B_1 de $\mathrm{Im}(f)$ dans B; soit ψ l'isomorphisme $\mathrm{Im}(f) \to A_1$ réciproque de l'isomorphisme $A_1 \to \mathrm{Im}(f)$ induit par f; soit p la projection de A sur $\mathrm{Ker}(f)$ le long de A_1 et q la projection de B sur B_1 le long de $\mathrm{Im}(f)$. $p \in F(A)$.

$h = \varphi \circ (b - q)$, où b représente l'automorphisme identique de B, est un homomorphisme de B dans A tel que $h \circ f = a - p$.

La condition est suffisante, car elle implique que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(p)$. Ainsi $k(f) \leqslant \rho(p) < \infty$.

COROLLAIRE 1 — *Quels que soient* $f \in \alpha(A, B)$ *et* $g \in F(A, B)$, $f + g \in \alpha(A, B)$ *et* $\mathrm{Max}(0, k(f) - \rho(g)) \leqslant k(f + g) \leqslant k(f) + \rho(g)$.

On reprend l'homomorphisme $h = \varphi \circ (b - q)$. De $h \circ f = a - p$, on tire $h \circ (f + g) = a + (h \circ g - p)$ et comme $(h \circ g) - p \in F(A)$, il suit que $f + g \in \alpha(A, B)$ et $k(f + g) \leqslant \rho(p - (h \circ g)) \leqslant k(f) + \rho(g)$. Appliquant cette inégalité à $f = (f + g) - g$, on trouve que $k(f) \leqslant k(f + g) + \rho(g)$, ce qui achève de prouver le corollaire.

Remarque. $k(f + g)$ peut prendre toute valeur entière satisfaisant

à ces inégalités. Dans $A = \Lambda^{\mathbf{N}}$, $g : (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \to (x_1, x_2, 0, 0, \ldots)$ est un endomorphisme de rang 2; $f : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots) \to (x_1, x_2, 0, 0, x_5, x_6, \ldots)$ est un endomorphisme à noyau de dimension 2. $g - f : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots) \to (0, 0, 0, 0, -x_5, -x_6, \ldots)$ est un endomorphisme à noyau de dimension 4

$$k(-f) + \rho(g) = k(g - f).$$

Pour $h : (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \to (0, -x_2, x_1, 0, x_5, x_6, \ldots)$, $k(h + g) = 3 < k(h) + \rho(g) = 4$. Pour $l : (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \to (0, 0, x_1, x_2, x_5, x_6, \ldots)$, $k(l + g) = 2 \leqslant k(l) + \rho(g) = 4$. Pour $p : (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \to (0, 0, x_1, x_4, \ldots)$, $k(p + g) = 1 \leqslant k(p) + \rho(g) = 4$ et $k(p + g) \geqslant \text{Max}(0, k(p) - \rho(g) = 0$. Enfin pour $q : (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \to (0, 0, x_3, x_4, \ldots)$, $k(q + g) = 0 = \text{Max}(0, k(q) - \rho(g))$.

COROLLAIRE 2 — *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel* A *sur un corps commutatif* Λ. *Pour que f ait un noyau de dimension finie, il faut et il suffit que son image* $\varphi(f)$ *par l'homomorphisme canonique* $\varphi : L(A) \to L(A)/F(A)$ *soit inversible à gauche dans l'algèbre* L(A)/F(A).

COROLLAIRE 3 — *Soit f un homomorphisme d'un espace vectoriel* A *sur un corps commutatif* Λ *dans un espace vectoriel* B *sur* Λ. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes* :

a) *f est un monomorphisme*;

b) *il existe au moins un homomorphisme h de* B *dans* A *tel que* $h \circ f = a$, *où a est l'automorphisme identique de* A.

c) *quels que soient l'espace vectoriel* C *sur* Λ *et l'homomorphisme g de* C *dans* A, *la relation* $f \circ g = 0$ *entraîne la relation* $g = 0$.

a) $\to$ *b*). Soit *b*, l'automorphisme identique de B, *q* la projection de B sur un supplémentaire quelconque de Im(*f*) dans B, et φ l'isomorphisme réciproque de celui de A sur Im(*f*) induit par *f*. Alors $h = \varphi \circ (b - q)$ est un homomorphisme qui vérifie la relation $h \circ f = a$.

b) $\to$ *c*). $f \circ g = 0$ entraîne $h \circ f \circ g = g = 0$.

c) $\to$ *a*). Dans le cas particulier où C = A et où *g* est la projection *p* de A sur Ker(*f*) le long d'un supplémentaire quelconque de Ker(*f*) dans A, on a évidemment $f \circ p = 0$, d'où $p = 0$ et Ker(*f*) = {0}.

COROLLAIRE 4 — *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel* A *sur un corps commutatif* Λ. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes* :

a) *f est un monomorphisme de* A;

b) *f est inversible à gauche dans l'algèbre* L (A);

c) *f n'est pas diviseur à gauche de* 0 *dans* L (A).

C'est un cas particulier du corollaire 2, où B = A.

2 — HOMOMORPHISMES A IMAGE DE CODIMENSION FINIE

Si A est un espace vectoriel sur Λ, A* représente l'ensemble des formes linéaires sur A; c'est un espace vectoriel sur Λ, appelé le *dual* (algébrique) de A.

Soit C une partie de A; l'ensemble $C^{\perp}$ des $x^* \in A^*$, tels que $\langle x^*, x\rangle = 0$ pour tout $x \in C$, est appelé l'ensemble orthogonal à C.

Si f est un homomorphisme de A dans B, il existe un homomorphisme ${}^t f$ de B* dans A*, et un seul, tel que $\langle y^*, f(x)\rangle = \langle {}^t f(y^*), x\rangle$, quels que soient $x \in A$ et $y^* \in B^*$; ${}^t f$ est appelé le transposé (algébrique) de f.

PROPOSITION 4 — Soit f un homomorphisme de A dans B.

a) $\mathrm{Ker}({}^t f) = (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$;

b) $\mathrm{Im}({}^t f) = (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$.

a) est bien connu.

b) Si $x^* \in \mathrm{Im}({}^t f)$, il existe au moins un $y^* \in B^*$ tel que $x^* = {}^t f(y^*)$. Alors, quel que soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$, $\langle x^*, x\rangle = \langle y^*, f(x)\rangle = 0$, ce qui entraîne que $x^* \in (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$. Réciproquement, soit $x^* \in (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$. Si q désigne la projection de B sur $\mathrm{Im}(f)$ le long d'un supplémentaire de $\mathrm{Im}(f)$ dans B, et si φ représente l'isomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$ sur un supplémentaire A_1 de $\mathrm{Ker}(f)$ dans A, réciproque de l'isomorphisme de A_1 sur $\mathrm{Im}(f)$ induit par f, on pose $y^* = x^* \circ \varphi \circ q$; $y^* \in B^*$. Tout x se décompose d'une manière et d'une seule en $x = x_K + x_1$ avec $x_K \in \mathrm{Ker}(f)$ et $x_1 \in A_1$. D'où $\langle {}^t f(y^*), x\rangle = \langle y^*, f(x_1)\rangle = \langle x^*, \varphi(q(f(x_1)))\rangle = \langle x^*, x_1\rangle = \langle x^*, x\rangle$. Donc $x^* = {}^t f(y^*) \in \mathrm{Im}({}^t f)$, ce qui achève d'établir *b*).

β (A, B) représente l'ensemble des homomorphismes de A dans B, dont l'image est de codimension finie. Si B = A, β (A) représente β (A. B). Lorsque $f \in \beta$ (A, B), on pose $\mathrm{cok}(f) = \mathrm{codim}_B \mathrm{Im}(f)$.

PROPOSITION 5 — *a*) *Pour que f soit un homomorphisme de* A *dans* B *à image de codimension finie n, il faut et il suffit que son transposé* ${}^t f$ *soit un homomorphisme de* B* *dans* A* *à noyau de dimension finie n. En particulier, pour que f soit un épimorphisme de* A *sur* B, *il faut et il suffit que* ${}^t f$ *soit un monomorphisme de* B* *dans* A*.

b) *Pour que f soit un homomorphisme de* A *dans* B *à noyau de dimension finie n, il faut et il suffit que son transposé* ${}^t f$ *soit un homomorphisme de* B* *dans* A* *à image de codimension finie n. En particulier, pour que f soit un monomorphisme de* A *dans* B, *il faut et il suffit que* ${}^t f$ *soit un épimorphisme de* B* *sur* A*.

a) est évident en vertu du *a*) de la proposition 5 et aussi de la correspondance biunivoque entre les sous-espaces vectoriels de codimension finie *n* de B et les sous-espaces vectoriels de dimension finie *n* de B*, qui leur sont orthogonaux.

Quant au *b*), la condition est nécessaire. En effet, soit A_1 un supplémentaire algébrique de $\mathrm{Ker}(f)$ dans A. $A = A_1 \oplus \mathrm{Ker}(f)$, d'où $A^* = A_1^{\perp} \oplus (\mathrm{Ker}(f))^{\perp} = A_1^{\perp} \oplus \mathrm{Im}({}^t f)$. Or $\mathrm{codim}_A A_1 = k(f) < \infty$; donc $\dim_{A^*} A_1 = k(f)$ et $\mathrm{codim}_{A^*} \mathrm{Im}({}^t f) = \mathrm{cok}({}^t f) = k(f) < \infty$.

Réciproquement, la condition est suffisante. En effet, si ${}^t f \in \beta(B^*, A^*)$, ${}^t({}^t f) \in \alpha(A^{**}, B^{**})$ et $k({}^t({}^t f)) = \mathrm{cok}({}^t f)$. Or, si l'on identifie A à un sous-espace vectoriel de A**, on constate que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}({}^t({}^t f))$. D'où $f \in \alpha(A, B)$ et $k(f) \leqslant k(f) \leqslant k({}^t({}^t f))$. Alors, d'après ce qu'on vient de démontrer $\mathrm{cok}({}^t f) = k(f)$, ce qui achève de prouver la proposition.

COROLLAIRE 1 — *Quels que soient* $f \in \beta(A, B)$ *et* $g \in \beta(B, C)$, $g \circ f \in \beta(A, C)$ *et* $\mathrm{cok}(g) \leqslant \mathrm{cok}(g \circ f) \leqslant \mathrm{cok}(g) + \mathrm{cok}(f)$. *Réciproquement, quels que soient* $f \in L(A, B)$ *et* $g \in L(B, C)$, *la relation* $g \circ f \in \beta(A, C)$ *entraîne la relation* $g \in \beta(B, C)$ *et* $\mathrm{cok}(g) \leqslant \mathrm{cok}(g \circ f)$.

En effet, si $f \in \beta(A, B)$ et $g \in \beta(B, C)$, ${}^t f \in \alpha(B^*, A^*)$ et ${}^t g \in \alpha(C^*, A^*)$; d'où ${}^t f \circ {}^t g \in \alpha(C^*, A^*)$ avec $k({}^t g) \leqslant k({}^t f \circ {}^t g) \leqslant k({}^t f) + k({}^t g)$ (prop. 2). Donc $g \circ f \in \beta(A, C)$ et $\mathrm{cok}(g) \leqslant \mathrm{cok}(g \circ f) \leqslant \mathrm{cok}(f) + \mathrm{cok}(g)$.

COROLLAIRE 2 — $\beta(A)$ *est un semi-groupe multiplicatif de l'algèbre* $L(A)$. *Quel que soit* $n \in \mathbf{N}$, *pour tout* $f \in \beta(A)$, *la relation* $g^n = f$ *entraîne* $g \in \beta(A)$ *et* $\mathrm{cok}(g) \leqslant n \,\mathrm{cok}(g)$.

PROPOSITION 6 — *Pour que* $f \in \mathfrak{H}(A, B)$, *il faut et il suffit qu'il existe au moins un homomorphisme* h *de* B *dans* A *tel que* $f \circ h = b + q$, *où* b *désigne l'automorphisme identique de* B *et* q *un endomorphisme de rang fini de* B. *Dans ce cas* $\operatorname{cok}(f) \leqslant \rho(q)$.

La condition est nécessaire. En effet, soit A_1 un supplémentaire algébrique de $\operatorname{Ker}(f)$ dans A, φ l'isomorphisme de $\operatorname{Im}(f)$ sur A_1, réciproque de l'isomorphisme de A_1 sur $\operatorname{Im}(f)$ induit par f; soit encore q une projection de B le long de $\operatorname{Im}(f)$ sur un supplémentaire algébrique B_1 de $\operatorname{Im}(f)$ dans B. On pose $h = \varphi \circ (b - q)$. Quel que soit $y \in B$, on a d'une manière et d'une seule $y = y_L + y_1$ avec $y_L \in \operatorname{Im}(f)$ et $y_1 \in B_1$. Alors $f(h(y)) = f(h(y_L)) = y_L = (b - q)(y)$. Donc $f \circ h = b - q$.

La condition est suffisante. En effet, s'il existe un $h \in L(A, B)$ tel que $f \circ h = b + q$, ${}^t h \circ {}^t f = {}^t b + {}^t q$, où ${}^t b$ est l'automorphisme identique de B* et ${}^t q \in F(B^*)$. Donc ${}^t f \in \alpha(B^*, A^*)$ (prop. 3) avec $k({}^t f) \leqslant \rho({}^t q)$, ce qui entraîne que $f \in \mathfrak{H}(A, B)$ avec $\operatorname{cok}(f) = k({}^t f) \leqslant \rho({}^t q) = \rho(q)$.

COROLLAIRE 1 — *Quels que soient* $f \in \mathfrak{H}(A, B)$ *et* $g \in F(A, B)$, $f + g \in \mathfrak{H}(A, B)$ *et* $\operatorname{Max}(0, \operatorname{cok}(f) - \rho(g)) \leqslant \operatorname{cok}(f + g) \leqslant \operatorname{cok}(f) + \rho(g)$.

Il se prouve à partir de la position 6, comme le corollaire correspondant se déduit de la proposition 3. Il en est de même des corollaires suivants.

COROLLAIRE 2 — *Soit* f *un endomorphisme d'un espace vectoriel* A *sur un corps commutatif* Λ. *Pour que* f *ait une image de codimension finie, il faut et il suffit que son image* $\varphi(f)$ *par l'homomorphisme canonique* $\varphi : L(A) \to L(A)/F(A)$ *soit inversible à droite dans l'algèbre* $L(A)/F(A)$.

COROLLAIRE 3 — *Soit* f *un homomorphisme d'un espace vectoriel* A *sur un corps commutatif* Λ *dans un espace vectoriel* B *sur* Λ. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes* :

a) f *est un épimorphisme de* A *sur* B;

b) *il existe au moins un homomorphisme* h *de* B *dans* A, *tel que* $f \circ h$ *soit l'automorphisme identique de* B;

c) *quels que soient l'espace vectoriel* C *sur* Λ *et l'homomorphisme* g *de* B *dans* C, *la relation* $g \circ f = 0$ *entraîne la relation* $g = 0$.

COROLLAIRE 4 — *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel* A *sur un corps commutatif* Λ. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

a) *f est un épimorphisme de* A ;

b) *f est inversible à droite dans l'algèbre* L (A) ;

c) *f n'est pas un diviseur à droite de* 0 *dans* L (A).

Désormais, on représente par π (A, B) l'ensemble des épimorphismes de A sur B. Si B = A, π (A) représente π (A, A).

3 — HOMOMORPHISMES A NOYAU DE DIMENSION FINIE ET A IMAGE DE CODIMENSION FINIE

σ (A, B) représente l'ensemble des homomorphismes de A dans B, dont l'image est de codimension finie et le noyau de dimension finie. Si B = A, σ (A) représente σ (A, A). Lorsque $f \in \sigma$ (A, B), on pose $\varkappa(f) = k(f) - \operatorname{cok}(f)$; $\varkappa(f)$ est un entier rationnel appelé l'*indice* de f.

PROPOSITION 7 — *Pour que $f \in \sigma$ (A, B) et soit d'indice p, il faut et il suffit que ${}^t f \in \sigma$ (B*, A*) et soit d'indice $-p$.*

En effet, pour que $f \in \sigma(A, B) = \alpha(A, B) \cap \beta(A, B)$, il faut et il suffit que ${}^t f \in \beta(B^*, A^*) \cap \alpha(B^*, A^*) = \sigma(B^*, A^*)$. Enfin $\varkappa(f) = k(f) - \operatorname{cok}(f) = \operatorname{cok}({}^t f) - k({}^t f) = -\varkappa({}^t f)$.

PROPOSITION 8 — *Pour que f soit un homomorphisme de* A *dans* B *à noyau de dimension finie et à image de codimension finie, il faut et il suffit qu'il existe deux homomorphismes g et h de* B *dans* A, *tels que $g \circ f = a + p$ et $f \circ h = b + q$, où a* (resp. *b*) *est l'automorphisme identique de* A (resp. B) *et où p* (resp. *q*) *est un endomorphisme de rang fini de* A (resp. B).

Cette proposition est immédiatement évidente à partir des propositions 3 et 6.

COROLLAIRE 1 — *Pour que $f \in$ L (A) soit un endomorphisme de* A *à noyau de dimension finie et à image de codimension finie, il faut et il suffit que son image $\varphi(f)$ par l'homomorphisme canonique φ : L (A) $\to$ L (A)/F (A) soit inversible dans l'algèbre* L (A)/F (A).

PROPOSITION 9 — *Quels que soient $f \in \sigma$ (A, B) et $g \in \sigma$ (B, C), $g \circ f \in \sigma$ (A, C) et $\varkappa(g \circ f) = \varkappa(f) + \varkappa(g)$.*

En effet, $f \in \alpha(A, B)$ et $g \in \alpha(B, C)$. Donc $g \circ f \in \alpha(A, C)$ et $k(f) \leqslant k(g \circ f) \leqslant k(f) + k(g)$ (prop. 2). De même $f \in \beta(A, B)$ et $g \in \beta(B, C)$. Donc $g \circ f \in \beta(A, C)$ et $\operatorname{cok}(g) \leqslant \operatorname{cok}(g \circ f) \leqslant \operatorname{cok}(g) + \operatorname{cok}(f)$ (cor. 1 de la prop. 5). C'est pourquoi $g \circ f \in \sigma(A, C)$ et $\varkappa(g \circ f) \leqslant \varkappa(f) + \varkappa(g)$.

Or ${}^t f \in \sigma(B^*, A^*)$ et $\varkappa({}^t f) = -\varkappa(f)$; ${}^t g \in \sigma(C^*, B^*)$ et $\varkappa({}^t g) = -\varkappa(g)$. D'où ${}^t f \circ {}^t g \in \sigma(C^*, A^*)$ et $\varkappa({}^t f \circ {}^t g) = -\varkappa(g \circ f) \leqslant -\varkappa(f) - \varkappa(g)$. Ainsi $\varkappa(g \circ f) = \varkappa(f) + \varkappa(g)$.

Corollaire 1 — *Quels que soient* $f \in L(A, B)$ *et* $g \in L(B, C)$, *la relation* $g \circ f \in \sigma(A, C)$ *entraîne, soit les relations* $f \in \alpha(A, B) \cap \complement\beta(A, B)$ et $g \in \beta(B, C) \cap \complement\alpha(B, C)$, *soit les relations* $f \in \sigma(A, B)$ *et* $g \in \sigma(B, C)$.

En effet, comme $g \circ f \in \alpha(A, C)$, $f \in \alpha(A, B)$ (cor. 1 de la prop. 2); de ce que $g \circ f \in \beta(A, C)$, on tire pareillement que $g \in \beta(B, C)$ (cor. 1 de la prop. 5). C'est pourquoi il faut et il suffit de prouver que

a) $g \in \alpha(B, C)$ entraîne $f \in \beta(A, B)$,

b) $f \in \beta(A, B)$ entraîne $g \in \alpha(B, C)$.

a) Puisque $g \circ f \in \sigma(A, C)$, $\operatorname{cok}(g \circ f) < \infty$. Or puisque $g \in \beta(B, C)$, $\operatorname{cok}(g) < \infty$. D'où tout supplémentaire algébrique de $\operatorname{Im}(g \circ f)$ dans $\operatorname{Im}(g)$ est de dimension finie dans C. Or, soit B_2 un supplémentaire algébrique de $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)$ dans $\operatorname{Ker}(g)$, et B_3 un supplémentaire algébrique de $\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Ker}(g)$ dans B. La restriction de g à B_3 est un isomorphisme de B_3 sur $g(B_3)$ et $g(B_3)$ est un supplémentaire algébrique de $\operatorname{Im}(g \circ f)$ dans $\operatorname{Im}(g)$. Donc B_3 est de dimension finie.

Or $g \in \alpha(B, C)$, par hypothèse. Donc $\operatorname{Ker}(g)$ et B_2 sont des sous-espaces vectoriels de B, de dimension finie. Comme $\operatorname{Im}(f)$ est un supplémentaire algébrique de $B_2 \oplus B_3$ dans B, il suit que $\operatorname{cok}(f) < \infty$ ou que $f \in \beta(A, B)$.

b) Les relations $g \circ f \in \sigma(A, C)$ et $f \in \sigma(A, B)$ entraînent les relations ${}^t f \circ {}^t g \in \sigma(C^*, A^*)$ et ${}^t f \in \sigma(B^*, A^*)$ (prop. 7). Donc, en vertu de *a*), ${}^t g \in \sigma(C^*, B^*)$ et d'après la proposition 7, $g \in \sigma(B, C)$.

Corollaire 2 — $\sigma(A)$ *est un semi-groupe multiplicatif de l'algèbre* $L(A)$. *Quel que soit* $n \in \mathbf{N}$, *pour tout* $f \in \sigma(A)$, *la relation* $g^n = f$ *entraîne la relation* $g \in \sigma(A)$ *et* $\varkappa(f) = n\varkappa(g)$.

PROPOSITION 10 — *Quels que soient* $f \in \sigma(A, B)$ *et* $g \in F(A, B)$, $f + g \in \sigma(A, B)$ *et* $\varkappa(f + g) = \varkappa(f)$.

En effet $f + g \in \alpha(A, B)$ et $k(f + g) \leqslant k(f) + \rho(g)$ (cor. 1 de la prop. 3); $f + g \in \beta(A, B)$ et $\operatorname{cok}(f + g) \leqslant \operatorname{cok}(f) + \rho(g)$ (cor. 1 de la prop. 6). D'où $f + g \in \sigma(A, B)$ et $\varkappa(f + g) \leqslant \varkappa(f)$. Appliquant cette inégalité à la somme $f = (f + g) - g$, on a $\varkappa(f) \leqslant \varkappa(f + g)$. Donc $\varkappa(f + g) = \varkappa(f)$.

L'ensemble $\omega(A, B)$ des isomorphismes de A sur B constitue une classe remarquable de $\sigma(A, B)$.

Si $B = A$, $\omega(A)$ représente $\omega(A, A)$.

$\omega(A, B) = \mu(A, B) \cap \pi(A, B)$.

Pour tout $f \in \omega(A, B)$ et tout $g \in \omega(B, C)$, $g \circ f \in \omega(A, C)$. Donc $\omega(A)$ est un sous-groupe multiplicatif de l'algèbre $L(A)$: c'est l'ensemble de tous les éléments inversibles dans $L(A)$.

PROPOSITION 11 — *Quels que soient* $f \in L(A, B)$ *et* $g \in L(B, C)$, *la relation* $g \circ f \in \omega(A,C)$ *entraîne, soit les relations* $f \in \mu(A,B) \cap \bigcap \beta(A,B)$ *et* $g \in \pi(B, C) \cap \bigcap \alpha(B, C)$, *soit les relations* $f \in \mu(A, B) \cap \beta(A, B) \cap \bigcap \pi(A, B)$ et $g \in \pi(B, C) \cap \alpha(B, C) \cap \bigcap \mu(B, C)$, *soit les relations* $f \in \omega(A, B)$ *et* $g \in \omega(B, C)$. *Dans les deux derniers cas, on a* $\operatorname{cok}(f) = k(g)$.

En effet, on a toujours $f \in \mu(A, B)$ et $g \in \pi(B, C)$. En vertu du corollaire 1 de la proposition 9, on a soit $f \in \mu(A, B) \cap \bigcap \beta(A, B)$ et $g \in \pi(B, C) \cap \bigcap \alpha(B, C)$, soit $f \in \mu(A, B) \cap \beta(A, B)$ et $g \in \pi(B, C) \cap \alpha(B, C)$.

Dans cette dernière hypothèse, $\varkappa(f) = -\operatorname{cok}(f)$ et $\varkappa(g) = k(g)$. Or $\varkappa(g \circ f) = \varkappa(f) + \varkappa(g) = 0$. D'où $\operatorname{cok}(f) = k(g)$. Dès lors deux cas se présentent : ou bien $\operatorname{cok}(f) = k(g) \neq 0$, ce qui veut dire que $f \in \pi(A, B)$ et $g \in \mu(B, C)$, ou bien $\operatorname{cok}(f) = k(g) = 0$, ce qui veut dire que $f \in \mu(A, B) \cap \pi(A, B) = \omega(A, B)$ et $g \in \pi(B, C) \cap \mu(B, C) = \omega(B, C)$.

Remarques — 1. Soit A un espace vectoriel ayant une base infinie dénombrable $(a_n)_{n \leqslant 1}$. L'endomorphisme f de A tel que

$f(a_n) = a_{2n}$, pour tout $n \geqslant 1$, est un monomorphisme de A dont l'image dans A admet un supplémentaire de dimension non finie. Donc $f \in \mu(A) \cap \complement\, \beta(A)$. L'endomorphisme g de A tel que $g(a_{2n-1}) = 0$, $g(a_{2n}) = a_n$ pour tout $n \geqslant 1$, est un épimorphisme de A, dont le noyau dans A n'est pas de dimension finie. Donc $g \in \pi(A) \cap \complement\, \alpha(A)$. Or $g \circ f = a$.

L'endomorphisme f de A tel que $f(a_n) = a_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$, est un monomorphisme de A tel que $A = \Lambda a_1 \oplus \mathrm{Im}(f)$. Donc $f \in \mu(A) \cap \beta(A) \cap \complement\, \pi(A)$. L'endomorphisme g de A tel que $g(a_1) = 0$, $g(a_{n+1}) = a_n$ pour tout $n \geqslant 1$ est un épimorphisme de A tel que $\mathrm{Ker}(g) = \Lambda a_1$. Donc $g \in \pi(A) \cap \alpha(A) \cap \complement\, \mu(A)$. Or $g \circ f = a$.

L'endomorphisme f de A tel que $f(a_{2n-1}) = a_{2n}$ et $f(a_{2n}) = a_{2n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$, est un automorphisme de A. Or $f^2 = a$.

Ces trois exemples montrent que les trois hypothèses peuvent se rencontrer lorsque A, B et C sont de dimension infinie.

Si $\mathrm{Im}(f)$ n'est pas de codimension finie, ou fera désormais la convention que $\mathrm{cok}(f) = \infty$; de même, si $\mathrm{Ker}(f)$ n'est pas de dimension finie, on conviendra que $k(f) = \infty$.

Proposition 12 — 1°) *Soit* $f \in \alpha(A, B)$. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :

a) $k(f) \leqslant \mathrm{cok}(f) \leqslant \infty$;

b) $f = f_1 + f_2$, où $f_1 \in \mu(A, B)$ et $f_2 \in F(A, B)$.

2°) *Soit* $f \in \beta(A, B)$. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :

a) $\mathrm{cok}(f) \leqslant k(f) \leqslant \infty$;

b) $f = f_1 + f_2$ où $f_1 \in \pi(A, B)$ et $f_2 \in F(A, B)$.

1°) *a*) $\rightarrow$ *b*). On peut ne considérer que le cas où $n = k(f) \geqslant 1$. Soit B_1 un supplémentaire algébrique de $\mathrm{Im}(f)$ dans B. Il existe dans B_1 une partie libre $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. D'autre part, soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et soit $(x^*_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une famille de formes linéaires sur A, telles que $\langle x^*_j, x_i \rangle = \delta_{ij}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. L'application

$f_2 : x \to \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \langle x^*_i, x \rangle y_i$ est un homomorphisme de rang fini de A dans B. Soit $f_1 = f - f_2$. D'après la proposition 3, corollaire 2, $f_1 \in \alpha(A, B)$. De plus $\mathrm{Ker}(f_1) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Car si $f_1(x) = 0$, $f(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \langle x^*_i, x \rangle y_i \in B_1 \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Enfin, $\mathrm{Ker}(f_1) = \{0\}$. Car si $f_1(x) = 0$, $x = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i x_i$; d'autre part $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \langle x^*_i, x \rangle y_i = 0$, ce qui entraîne $\langle x^*_i, x \rangle = \alpha_i = 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, donc $x = 0$.

b) $\to$ *a*). On procède par l'absurde et on suppose que $\mathrm{cok}(f) < k(f)$. Alors $f \in \sigma(A, B)$ et $\varkappa(f) > 0$. Or $\varkappa(f) = \varkappa(f_1 + f_2) = \varkappa(f_1) = -\mathrm{cok}(f_1) \leqslant 0$, ce qui est contradictoire.

2°) *a*) $\to$ *b*). On peut ne considérer que le cas où $n = \mathrm{cok}(f) \geqslant 1$. Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille libre de $\mathrm{Ker}(f)$, $(x^*_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de A* telle que $\langle x^*_j, x_i \rangle = \delta_{ij}$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, et $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base d'un supplémentaire B_1 de $\mathrm{Im}(f)$ dans B. Soit $f_2 : x \to \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \langle x_i^*, x \rangle y_i$: c'est un homomorphisme de rang fini de A dans B. Soit $f_1 = f - f_2$. Alors $f_1 \in \beta(A, B)$. On veut montrer que $f_1(A) = B$. On considère un y quelconque dans B. Alors $y = y_1 + y_1$ avec $y_1 \in B_1$ et $y_1 \in \mathrm{Im}(f)$. D'où $y_1 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i y_i$ et il existe un $z \in A$ tel que $y_1 = f(z)$. On pose $\langle x_i^*, y \rangle = \beta_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et $z_1 = z - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (\alpha_i + \beta_i) x_i$. Alors $f_2(y) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \beta_i y_i$, $f(x_i) = 0$ et $f_2(x_i) = y_i$. D'où $f_1(z_1) = y$, ce qui établit que $f_1 \in \pi(A, B)$.

b) $\to$ *a*). On procède par l'absurde et on suppose que $k(f) < \mathrm{cok}(f)$. Alors $f \in \sigma(A, B)$ et $\varkappa(f) < 0$. Or $\varkappa(f) = \varkappa(f_1) = k(f_1) \geqslant 0$, ce qui est contradictoire.

La proposition 12 conduit à une caractérisation des divers homomorphismes qui ont été envisagés jusqu'ici.

THÉORÈME 1 — *Soit f un homomorphisme d'un espace vectoriel* A *sur un corps commutatif* Λ *dans un espace vectoriel* B *sur* Λ.

1°) *Pour que f ait un noyau de dimension finie ou une image de codimension finie, il faut et il suffit que* $f = f_1 + f_2$, *où* f_2 *est un homomorphisme de rang fini et* f_1 *est un monomorphisme ou un épimorphisme.*

2°) *Pour que f ait un noyau de dimension finie et une image de*

codimension infinie, il faut et il suffit que f_1 soit un monomorphisme dont l'image est de codimension infinie.

3°) *Pour que f ait un noyau de dimension finie, une image de codimension finie et un indice strictement négatif, il faut et il suffit que f_1 soit un monomorphisme dont l'image est de codimension finie non nulle.*

4°) *Pour que f ait un noyau de dimension finie, une image de codimension finie et un indice nul, il faut et il suffit que f_1 soit un isomorphisme de* A *sur* B.

5°) *Pour que f ait un noyau de dimension finie, une image de codimension finie et un indice strictement positif, il faut et il suffit que f_1 soit un épimorphisme dont le noyau est de codimension finie non nulle.*

6°) *Pour que f ait une image de codimension finie et un noyau de dimension infinie, il faut et il suffit que f_1 soit un épimorphisme dont le noyau est de dimension infinie.*

Pour prouver le théorème, il suffit d'examiner les cinq cas suivants :

1°) $f \in \alpha(A, B) \cap \complement\, \beta(A, B)$. Alors, par la proposition 12, $f_1 \in \mu(A, B)$; si $f_1 \in \sigma(A, B)$, on aurait que $f \in \sigma(A, B) \subset \beta(A, B)$. Donc $f_1 \in \mu(A, B) \cap \complement\, \sigma(A, B)$. Réciproquement, pour un tel f_1, $f \in \alpha(A, B)$ et, si $f \in \beta(A, B)$, on aurait que $f_1 \in \sigma(A, B)$, ce qui est contradictoire. D'où $f \in \alpha(A, B) \cap \complement\, \beta(A, B)$.

2°) $f \in \beta(A, B) \cap \complement\, \alpha(A, B)$. On prouve, de la même manière qu'au 1°, que cette condition est équivalente à $f_1 \in \pi(A, B) \cap \complement\, \sigma(A, B)$.

3°) $f \in \sigma(A, B)$ est équivalent à $f_1 \in \sigma(A, B)$. D'où trois cas à envisager :

a) $\varkappa(f) < 0$. Alors, d'après la proposition 12, $f_1 \in \mu(A, B)$. De plus, si $f_1 \in \omega(A, B)$, on aurait $\varkappa(f) = \varkappa(f_1) = 0$, ce qui est contradictoire. Donc $f_1 \in \sigma(A, B) \cap \mu(A, B) \cap \complement\, \omega(A, B)$. Réciproquement, cette condition entraîne $\varkappa(f) = \varkappa(f_1) = -\mathrm{cok}(f_1) < 0$.

b) $\varkappa(f) = 0$. Alors, d'après la proposition 12, $f_1 \in \omega(A, B)$. La réciproque est immédiate.

c) $\varkappa(f) > 0$. On prouve, comme en *a*), que cette condition est équivalente à la condition $f_1 \in \sigma(A, B) \cap \pi(A, B) \cap \bigcap \omega(A, B)$.

Remarque — Soit A un espace vectoriel sur Λ à base dénombrable infinie $(a_n)_{n \geqslant 1}$.

L'endomorphisme f de A, tel que $f(a_{2n-1}) = 0$ et $f(a_{2n}) = a_n$ pour tout $n \geqslant 1$, est un élément de $\pi(A) \cap \bigcap \sigma(A)$.

L'endomorphisme f' de A, tel que $f'(a_n) = a_{2n}$ pour tout $n \geqslant 1$, est un élément de $\mu(A) \cap \bigcap \sigma(A)$.

L'endomorphisme f'' de A, tel que $f(a_n) = a_{n+p}$ pour tout $n \geqslant 1$ $(p \geqslant 1)$, est un élément de $\mu(A) \cap \sigma(A) \cap \bigcap \omega(A)$ et $\varkappa(f'') = -p$.

L'endomorphisme f''' de A, tel que $f(a_m) = 0$ pour $1 \leqslant m \leqslant p$ et $f(a_{n+p}) = a_n$ pour tout $n \geqslant 1$ $(p \geqslant 1)$, est un élément de $\pi(A) \cap \sigma(A) \cap \bigcap \omega(A)$ et $\varkappa(f) = p$.

Ainsi lorsque A et B sont de dimension infinie, les cinq classes $\mu(A, B) \cap \bigcap \sigma(A, B)$, $\mu(A, B) \cap \beta(A, B) \cap \bigcap \omega(A, B)$, $\omega(A, B)$, $\pi(A, B) \cap \alpha(A, B) \cap \bigcap \omega(A, B)$ et $\pi(A, B) \cap \bigcap \sigma(A, B)$ peuvent ne pas être vides.

4 — Décompositions d'un espace vectoriel relativement a un endomorphisme

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel A sur un corps commutatif Λ.

On pose $M^p = \mathrm{Ker}(f^p)$, $L_p = \mathrm{Im}(f^p)$ pour tout $p \geqslant 0$, et $D_k^j = M^j \cap L_k$ $(0 \leqslant j,\ 0 \leqslant k)$.

Quels que soient $1 \leqslant j$, $0 \leqslant k$ et $p \leqslant j$, f^p est un épimorphisme de D_k^j sur D_{k+p}^{j-p}. En effet, $f^p(D_k^j) \subset f^p(M^j) \cap f^p(L_k) \subset M^{j-p} \cap L_{k+p} = D_{k+p}^{j-p}$. Réciproquement, soit $x \in D_{k+p}^{j-p}$; il existe au moins un $y \in L_k$ tel que $f^p(y) = x$; de plus $f^{j-p}(x) = f^j(y) = 0$; d'où $y \in M^j \cap L_k = D_k^j$.

PROPOSITION 13 — *Quel que soit* $p \geqslant 1$, *il existe* $(p+1)$ *sous espaces vectoriels* $(A_r^{p+1-r})_{0 \leqslant r \leqslant p}$ *de* A, *ayant les propriétés suivantes* :

a) $A_r^{p+1-r} \cap (A_{r+1}^{p-r} \oplus \ldots \oplus A_{r+n}^{p+1-r-n}) = \{0\}$ *pour tout* r *et tout* n *vérifiant les inégalités* $0 \leqslant r \leqslant p$, $1 \leqslant n \leqslant p - r$;

b) $L_r = A_r^{p+1-r} \oplus (D_r^{p-r} + L_{r+1})$ $(0 \leqslant r \leqslant p)$;

c) *f est un isomorphisme de* A_r^{p+1-r} *sur* A_{r+1}^{p-r} $(0 \leqslant r \leqslant p-1)$.

En effet, soit A_0^{p+1} un supplémentaire algébrique de $D_0^p + L_1$ dans A.

Puisque $A = A_0^{p+1} \oplus (D_0^p + L_1)$, il suit que $L_r = f^r(A) = f^r(A_0^{p+1}) + f^r(D_0^p) + f^r(L_1) = f^r(A_0^{p+1}) + (D_r^{p-r} + L_{r+1})$, quel que soit $0 \leqslant r \leqslant p$.

Or $f^r(A_0^{p+1}) \cap (D_r^{p-r} + L_{r+1}) = \{0\}$. En effet, soit x un élément de cette intersection; il existe au moins $y \in A_0^{p+1}$ tel que $f^r(y) = x$ et x se décompose au moins d'une manière en la somme $x = x' + x''$ avec $x' \in D_r^{p-r}$ et $x'' \in L_{r+1}$. Alors, il existe au moins un $y'' \in L_1$ tel que $x'' = f^r(y'')$. D'où $f^r(y - y'') = x' \in D_r^{p-r}$; ainsi $y - y'' \in M^p$ ou $y \in D_0^p + L_1$. Or $y \in A_0^{p+1}$; donc $y = 0$ et $x = 0$.

C'est pourquoi si l'on pose $f^r(A_0^{p+1}) = A_r^{p+1-r}$ $(0 \leqslant r \leqslant p)$, on a $A_r^{p+1-r} \oplus (D_r^{p-r} + L_{r+1}) = L_r$.

Evidemment $A_r^{p+1-r} \subset L_r$ et $A_r^{p+1-r} \cap L_{r+1} = \{0\}$.

D'où $A_{r+1}^{p-r} + A_{r+2}^{p-r+1} + \ldots + A_{r+n}^{p+1-r-n} \subset L_{r+1}$, quel que soit $1 \leqslant n \leqslant p - r$, et $A_r^{p+1-r} \cap (A_{r+1}^{p-r} + \ldots + A_{r+n}^{p+1-r-n}) = \{0\}$. En particulier pour $n = 2$, on a que $A_r^{p+1-r} \cap A_{r+1}^{p-r} = \{0\}$ et, par conséquent, que $A_{r+1}^{p-r} + \ldots + A_{r+n}^{p+1-r-n} = A_{r-1}^{p-r} \oplus \ldots \oplus A_{r+n}^{p+1-r-n}$. Ainsi se trouve établie la propriété *a*).

Enfin la restriction de f à A_r^{p+1-r} est un isomorphisme de A_r^{p+1-r} sur A_{r+1}^{p-r}. Or, par définition de A_{r+1}^{p-r}, c'est un épimorphisme. Il reste à prouver que les relations $x \in A_r^{p+1-r}$ et $f(x) = 0$ entraînent la relation $x = 0$. En effet, la relation $f(x) = 0$ entraîne que $x \in M^1 \subset M^{p-r}$; la relation $x \in A_r^{p+1-r}$ entraîne que $x \in L_r$. D'où $x \in D_r^{p-r} \subset D_r^{p-r} + L_{r+1}$; d'où $x \in A_r^{p+1-r} \cap (D_r^{p-r} + L_{r+1}) = \{0\}$.

COROLLAIRE 1 — *S'il existe un entier* $p \geqslant 0$, *tel que* $L_p = L_{p+1}$, *alors* $L_q = L_{q+1}$ *pour tout* $q \geqslant p$.

Soit $q > p$ et $(A_r^{q+1-r})_{0 \leqslant r \leqslant q}$ une famille de sous-espaces vectoriels vérifiant les conditions de la proposition 13. Alors $L_p = A_p^{q+1-p} \oplus (D_p^{q-p} + L_{p+1}) = A_p^{q+1-p} \oplus L_p$, ce qui entraîne que $A_p^{q+1-p} = \{0\}$, d'où $A_q^1 = \{0\}$ et $L_q = A_q^1 \oplus L_{q+1} = L_{q+1}$.

Lorsque $f \in \beta(A)$, on pose $l_p = \operatorname{codim} L_p = \operatorname{cok}(f^p)$. (En effet, d'après la corollaire 1 de la proposition 5, $f^p \in \beta(A)$). On pose encore $c_p = l_p - l_{p-1}$ $(p \geqslant 1)$. La proposition 13 apporte un renseignement sur la suite $(c_p)\ p \geqslant 1$ d'entiers $\geqslant 0$.

Corollaire 2 — *Lorsque* $f \in \beta(A)$, $c_p \geqslant c_{p+1}$ $(p \geqslant 1)$.

En effet, soit (A_r^{p+1-r}) une famille de sous-espaces vectoriels de A, vérifiant les conditions de la proposition 13. $L_p = A_p^1 \oplus L_{p+1}$; d'où $\dim A_p^1 = c_{p+1}$. $L_{p-1} = A_{p-1}^2 \oplus (D_{p-1}^1 + L_p)$; d'où A_{p-1}^2 est contenu dans un supplémentaire algébrique de L_p dans L_{p-1}. Comme $\dim A_{p-1}^2 = \dim A_p^1 = c_{p+1}$, il suit que $c_p \geqslant c_{p+1}$.

Proposition 14 — *Quel que soit* $p \geqslant 1$, *il existe* $(p+1)$ *sous-espaces vectoriels* $(A_r^{p+1-r})_{0 \leqslant r \leqslant p}$ *de* A, *ayant les propriétés suivantes* :

a) $A_r^{p+1-r} \cap (A_{r+1}^{p-r} \oplus \ldots \oplus A_{r+n}^{p+1-r-n}) = \{0\}$ *pour tout* r *et tout* n *vérifiant les relations* $0 \leqslant r \leqslant p$, $1 \leqslant n \leqslant p - r$;

b) $D_r^{p+1-r} = A_r^{p+1-r} \oplus D_r^{p-r}$ $(0 \leqslant r \leqslant p)$;

c) f *est un isomorphisme de* A_r^{p+1-r} *sur* A_{r+1}^{p-r} $(0 \leqslant r \leqslant p-1)$.

En effet, soit A_0^{p+1} un supplémentaire algébrique de M^p dans M^{p+1}.

Puisque $M^{p+1} = A_0^{p+1} \oplus M^p$, il suit que $D_r^{p+1-r} = f^r(A_0^{p+1}) + D_r^{p-r}$, quel que soit $0 \leqslant r \leqslant p$.

Or $f^r(A_0^{p+1}) \cap D_r^{p-r} = \{0\}$. En effet, soit x un élément de cette intersection; il existe au moins un $y \in A_0^{p+1}$ et un $y' \in D_0^p$, tels que $x = f^r(y) = f^r(y')$. D'où $y - y' \in M^r$ et $y \in M^r + M^p = M^p$. Or $y \in A_0^{p+1}$. Donc $y = 0$ et $x = 0$.

Par conséquent, en posant $f^r(A_0^{p+1}) = A_r^{p+1-r}$ $(0 \leqslant r \leqslant p)$, on obtient $D_r^{p+1-r} = A_r^{p+1-r} \oplus D_r^{p-r}$.

On a tout de suite que $A_r^{p+1-r} \subset M^{p+1-r}$ et $A_r^{p+1-r} \cap M^{p-r} = \{0\}$.

D'où $A_{r+1}^{p-r} + A_{r+2}^{p-r-1} + \ldots + A_{r+n}^{p+1-r-n} \subset M^{p-r}$, quel que soit $1 \leqslant n \leqslant p - r$, et $A_r^{p+1-r} \cap (A_{r+1}^{p-r} + \ldots + A_{r+n}^{p+1-r-n}) = \{0\}$. En particulier, pour $n = 2$, on aura que $A_r^{p+1-r} \cap A_{r+1}^{p-r} = \{0\}$, et, par conséquent, que $A_{r+1}^{p-r} + \ldots + A_{r+n}^{p+1-r-n} = A_{r+1}^{p-r} \oplus \ldots \oplus A_{r+n}^{p+1-r-n}$, ce qui achève d'établir la condition *a*).

Enfin la restriction de f à A_r^{p+1-r} est un isomorphisme de A_r^{p+1-r} sur A_{r+1}^{p-r}. Par définition de A_r^{p+1-r}, c'est un épimorphisme. Mais c'est aussi un monomorphisme. En effet, $x \in A_r^{p+1-r}$ et $f(x) = 0$ entraînent que $x \in L_r$ et que $x \in M^1 \subset M^{p-r}$; d'où $x \in D_r^{p-r} \cap A_r^{p+1-r} = \{0\}$.

COROLLAIRE 1 — *S'il existe un entier* $p \geqslant 0$ *tel que* $M^p = M^{p+1}$, *alors* $M^q = M^{q+1}$ *pour tout* $q \geqslant p$.

Soit $q > p$ et $(A_r^{q+1-r})_{0 \leqslant r \leqslant q}$ une famille de sous-espaces vectoriels de A vérifiant les conditions de la proposition 14. Alors $D_{q-p}^{p+1} = A_{q-p}^{p+1} \oplus D_{q-p}^{p} = A_{q-p}^{p+1} \oplus D_{q-p}^{p+1}$, ce qui entraîne que $A_{q-p}^{p+1} = \{0\}$, d'où $A_0^{q+1} = \{0\}$ et $M_0^{q+1} = A_0^{q+1} \oplus M^q = M^q$.

Lorsque $f \in \alpha(A)$, on pose $m_p = \dim M^p = \dim \operatorname{Ker}(f^p)$. (En effet, d'après le corollaire 1 de la proposition 2, $f^p \in \alpha(A)$). On pose encore $d_p = m_p - m_{p-1}$ $(p \geqslant 1)$. La proposition 14 apporte un renseignement sur la suite $(d_p)_{p \geqslant 1}$.

COROLLAIRE 2 — *Lorsque* $f \in \alpha(A)$, $d_p \geqslant d_{p+1}$ $(p \geqslant 1)$.

En effet, soit (A_r^{p+1-r}) une famille de sous-espaces vectoriels de A, vérifiant les conditions de la proposition 14. Alors A_0^{p+1} a pour dimension d_{p+1}. $D_1^p = A_1^p \oplus D_1^{p-1}$; d'où A_1^p est contenu dans un supplémentaire algébrique de M^{p-1} dans M^p. Comme $\dim A_1^p = \dim A_0^{p+1} = d_{p+1}$, il suit que $d_p \geqslant d_{p+1}$.

Soit $(A_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels de A. Avec M. Hukuhara, on dit qu'elle est linéairement indépendante si les conditions suivantes sont vérifiées

$$A_1 \cap (A_2 + \ldots + A_k) = \{0\} \qquad (2 \leqslant k \leqslant n).$$

Elles sont équivalentes aux conditions suivantes $A_{k_1} \cap (A_{k_2} + \ldots + A_{k_m}) = \{0\}$, où la suite $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ pour $2 \leqslant m \leqslant n$, constitue une suite de m entiers distincts extraits de l'intervalle $[1, n]$.

PROPOSITION 15 — *Quel que soit* $p \geqslant 1$, *il existe* $1/2\, p\,(p+1)$ *sous-espaces vectoriels* $(A_k^j)_{1 \leqslant j, 0 \leqslant k, j+k \leqslant p}$ *de* A, *ayant les propriétés suivantes* :

a) ils forment une famille linéairement indépendante;

b) $D_k^j = (A_k^j \oplus A_{k+1}^j \oplus \ldots \oplus A_{p-j}^j \oplus D_k^{j-1}) + D_{p-j+1}^j, (1 \leqslant j, 0 \leqslant k, j + k \leqslant p)$;

c) $D_k^j = A_k^1 \oplus A_k^2 \oplus \ldots \oplus A_k^j \oplus D_{k+1}^j$ $(1 \leqslant j, 0 \leqslant k, j + k \leqslant p)$;

d) f est un isomorphisme de A_k^j *sur* A_{k+1}^{j-1} $(2 \leqslant j, 0 \leqslant k, j + k \leqslant p)$.

On pose $E_k^j = D_k^{j-1} + D_{k+1}^j$ $(1 \leqslant j,\ 0 \leqslant k)$. Alors $E_0^j = M^{j-1} + D_1^j \subset M^j = D_0^j$ $(1 \leqslant j)$.

Soit A_0^j un supplémentaire algébrique de E_0^j dans D_0^j $(1 \leqslant j \leqslant p)$.

Puisque $D_0^j = A_0^j \oplus E_0^j$, il suit que $f^r(D_0^j) = f^r(A_0^j) + f^r(E_0^j)$, $= f^r(A_0^j) + f^r(M^{j-1}) + f^r(D_1^j) = f^r(A_0^j) + D_r^{j-r} + D_{r+1}^{j-r}$ $= f^r(A_0^j) + E_r^{j-r}$ $(1 \leqslant j \leqslant p,\ 0 \leqslant r \leqslant j-1)$.

Or $f^r(A_0^j) \cap E_r^{j-r} = \{0\}$. En effet, soit x un élément de cette intersection; il existe au moins un $y \in A_0^j$ tel que $f^r(y) = x$ et x se décompose au moins d'une manière en la somme $x = x' + x''$, avec $x' \in D_r^{j-r-1}$ et $x'' \in D_{r+1}^{j-r}$. Alors il existe au moins un $y'' \in D_1^j$ tel que $f^r(y'') = x''$. Par conséquent $f^r(y - y'') = x' \in D_r^{j-r-1}$, ce qui entraîne que $y - y'' \in M^{j-1}$. C'est pourquoi $y \in D_1^j + M^{j-1} = E_o^j$. Or $y \in A_o^j$; d'où $y = 0$ et $x = 0$.

Alors, si l'on pose $f^r(A_o^j) = A_r^{j-r}$ $(1 \leqslant j \leqslant p,\ 0 \leqslant r \leqslant j-1)$, on a $D_r^{j-r} = A_r^{j-r} \oplus E_r^{j-r}$.

Maintenant, quels que soient $1 \leqslant j,\ 0 \leqslant k$ tels que $j + k \leqslant p$, $A_k^j \subset D_k^j \subset E_k^{j+1}$. Donc, pour tout n tel que $1 \leqslant n \leqslant p - k$, on a $A_k^1 + A_k^2 + \ldots + A_k^{n-1} \subset E_k^2 + E_k^3 + \ldots + E_k^n = E_k^n$. Comme $A_k^n \cap E_k^n = \{0\}$, on a $(A_k^1 + A_k^2 + \ldots + A_k^{n-1}) \cap A_k^n = \{0\}$. En particulier, pour $n = 1$, on a $A_k^1 \cap A_k^2 = \{0\}$; donc $A_k^1 + A_k^2 = A_k^1 \oplus A_k^2$; faisant successivement $n = 3$, etc., on constate que $A_k^1 + A_k^2 + \ldots + A_k^{n-1} = A_k^1 \oplus A_k^2 \oplus \ldots \oplus A_k^{n-1}$ et donc $(A_k^1 \oplus A_k^2 \oplus \ldots \oplus A_k^{n-1}) \cap A_k^n = \{0\}$ $(0 \leqslant k \leqslant p,\ 1 \leqslant n \leqslant p - k)$.

De même $A_k^j \subset D_k^j \subset E_{k-1}^j$. Donc, pour tout n tel que $1 \leqslant n \leqslant p - j$, on a

$A_{p-j}^j + A_{p-j-1}^j + \ldots + A_{p-j-(n-1)}^j \subset E_{p-j-1}^j + E_{p-j-2} + \ldots + E_{p-j-n}^j$.

De ce que $A_{p-j-n}^j \cap E_{p-j-n}^j = \{0\}$, il résulte que

$A_{p-j-n}^j \cap (A_{p-j-(n-1)}^j + A_{p-j-(n-2)}^j + \ldots + A_{p-j}^j) = \{0\}$

et, comme précédemment, on déduit de là que

$(A_o^j \oplus A_1^j \oplus \ldots \oplus A_{n-1}^j) \cap A_n^j = \{0\}$ $(1 \leqslant j \leqslant p,\ 0 \leqslant n \leqslant p - j)$.

Les deux groupes de relations que l'on vient d'établir prouvent que la famille des sous-espaces vectoriels $(A_k^j)_{1 \leqslant j,\ 0 \leqslant k,\ j+k \leqslant p}$ est « linéairement indépendante ».

$A_k^j \cap D_k^{j-1} \subset A_k^j \cap (D_k^{j-1} + D_{k+1}^j) = A_k^j \cap E_k^j = \{0\}$. Donc $A_k^j \cap D_{j-1}^k = \{0\}$ $(1 \leqslant j,\ 0 \leqslant k,\ j + k \leqslant p)$. Alors pour tout $1 \leqslant j,\ 0 \leqslant k$ et $j + k \leqslant p$, on a $D_k^j = A_k^j \oplus E_k^j = A_k^j \oplus (D_k^{j-1} + D_{k+1}^j) = (A_k^j \oplus D_k^{j-1}) + D_{k+1}^j = (A_k^j \oplus D_k^{j-1}) + (A_{k+1}^j \oplus D_{k+1}^{j-1}) + D_{k+2}^j = (A_k^j \oplus A_{k+1}^j \oplus D_k^{j-1}) + D_{k+2}^j$. Continuant de la sorte jusqu'à ce que l'on atteigne le sous-espace vectoriel A_j^{p-j}, on arrive à la formule b).

De même $A_k^j \cap D_{k+1}^j \subset A_k^j \cap (D_k^{j-1} + D_{k+1}^j) = A_k^j \cap E_k^j = \{0\}$. Donc $A_k^j \cap D_{k+1}^j = \{0\}$ $(1 \leqslant j,\ 0 \leqslant k,\ j + k \leqslant p)$. Alors, pour tout $1 \leqslant j,\ 0 \leqslant k$ et $j + k \leqslant p$, on a $D_k^j = A_k^j \oplus E_k^j = A_k^j \oplus$

$(D_k^{j-1} + D_{k+1}^j) = (A_k^j \oplus D_{k+1}^j) + D_k^{j-1} = (A_k^j \oplus D_{k+1}^j) + (A_k^{j-1} \oplus D_{k+1}^{j-1}) + D_k^{j-2} = (A_k^j \oplus A_k^{j-1} \oplus D_{k+1}^j) + D_k^{j-2}$. Continuant jusqu'à ce que l'on atteigne le sous-espace vectoriel A_k^1, on arrive à la formule *c*).

Par définition des A_k^j ($j \geqslant 2$), f est un épimorphisme de A_k^j sur A_{k+1}^{j-1}. C'est aussi un monomorphisme. En effet, les relations $x \in A_k^j$ et $f(x) = 0$ entraînent $x \in L_k$ et $x \in M^1$, d'où $x \in D_k^1 \subset D_k^{j-1} + D_{k+1}^j = E_k^j$. Donc $x \in A_k^j \cap E_k^j = \{0\}$.

5 — Endomorphismes a suite finie de noyaux itérés distincts

Soit f un endomorphisme de A. On sait que $\{0\} = M^0 \subset M^1 \subset M^2 \subset \ldots \subset M^p \subset \ldots$ C'est cette suite qu'on se propose ici d'appeler la suite des noyaux itérés. Si elle est composée d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels distincts, f sera dit un ν- endomorphisme de A.

D'après le corollaire 1 de la proposition 14, si f est un ν-endomorphisme, il existe un entier $\nu(f)$ tel que $M^p \neq M^{p+1}$ pour tout $p < \nu(f)$ et $M^p = M^{p+1}$ pour tout $p \geqslant \nu(f)$. $\nu(f)$ est appelé l'*ordre* du ν-endomorphisme f.

$\nu(A)$ représente l'ensemble des ν-endomorphismes de A. Quel que soit $p \geqslant 0$, $\nu^p(A)$ représente celui des ν-endomorphismes d'ordre p.

$\nu^0(A) = \mu(A)$.

Si A est de dimension finie n, $\nu^p(A) = \varnothing$ pour tout $p > n$; pour tout $0 \leqslant p \leqslant n$, $\nu^p(A)$ contient, entre autres éléments, les endomorphismes nilpotents d'ordre p. De plus, pour tout $f \in \nu^p(A)$, $L_q \neq L_{q+1}$ pour tout $q < p$ et $L_q = L_{q+1}$ pour tout $q \geqslant p$.

Soit maintenant un espace vectoriel A à base infinie dénombrable $(a_n)_{n \geqslant 1}$. Quel que soit $p \geqslant 1$, l'endomorphisme f_p de A, défini par $f_p(a_{np+k}) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$ et $k = 1$ et par $f_p(a_{np+k}) = a_{np+k-1}$ pour tout $n \geqslant 0$ et $2 \leqslant k \leqslant p$, est nilpotent d'ordre p; d'où $f_p \in \nu^p(A)$. D'autre part, dans ce même espace A, l'application f définie par $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots) \to (0, 0, x_2, x_2, x_3, x_3, x_3, x_4, x_4, x_4, x_4 \ldots)$ est telle que $M^1(f) = M^2(f) = \Lambda(1,0,0,\ldots)$, mais, quel que soit q, $L_q(f) \neq L_{q+1}(f)$.

Proposition 16 — *Soit f un ν-endomorphisme d'ordre $p \geqslant 1$. Il existe $1/2(p+1)(p+2)$ sous-espaces vectoriels A_k^j ($1 \leqslant j$, $0 \leqslant k$, $j + k \leqslant p + 1$) tels que :*

a) *ils forment une famille linéairement indépendante.*

b) $A_0^p \neq \{0\}$; $A_k^j \cap M^p = \{0\}$ *pour* $1 \leqslant j,\ 0 \leqslant k,\ j + k = p + 1$;

c) $M^j = A_0^j \oplus A_1^j \oplus \ldots \oplus A_{p-j} \oplus M^{j-1}$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$;

d) $L_k = A_k^1 \oplus A_k^2 \oplus \ldots \oplus A_k^{p+1-k} \oplus L_{k+1}$ $(0 \leqslant k \leqslant p)$;

e) *la restriction de* f *à* A_k^j *est un isomorphisme de* A_k^j *sur* A_{k+1}^{j-1} $(2 \leqslant j,\ 0 \leqslant k,\ j + k \leqslant p + 1)$;

f) *la restriction de* f *à* L_p *est un monomorphisme de* L_p *dans* L_p *tel que* $L_{p+n} = f^n(A_p^1) \oplus L_{p+n+1}$ $(n \geqslant 0)$.

En effet, soit A_k^j $(1 \leqslant j,\ 0 \leqslant k,\ j + k \leqslant p)$ une famille de $1/2\, p\,(p + 1)$ sous-espaces vectoriels de A vérifiant les conditions de la proposition 15, et soit A_k^j $(1 \leqslant j,\ 0 \leqslant k,\ j + k = p + 1)$ une famille de sous-espaces vectoriels de A vérifiant les conditions de la proposition 13.

Dès lors, la famille $(A_k^j)_{1 \leqslant j,\ 0 \leqslant k,\ j+k \leqslant p+1}$ vérifient les conditions *a*) et *e*).

Soit encore $(B_k^j)_{1 \leqslant j,\ 0 \leqslant k,\ j+k=p+1}$ une famille de sous-espaces vectoriels de A vérifiant les conditions de la proposition 14. Or $M^p = M^{p+1}$; d'où $B_k^j = \{0\}$ et $D_j^{p+1-j} = D_j^{p-j}$ $(0 \leqslant j \leqslant p + 1)$. Alors, pour $1 \leqslant j,\ 0 \leqslant k,\ j + k \leqslant p$, $D_k^j = (A_k^j \oplus A_{k+1}^j \oplus \ldots \oplus A_{p-j}^j \oplus D_k^{j-1}) + D_{p-j+1}^j$

$$= (A_k^j \oplus A_{k+1}^j \oplus \ldots \oplus A_{p-j}^j \oplus D_k^{j-1}) + D_{p-j+1}^{j-1}$$
$$= A_k^j \oplus A_{k+1}^j \oplus \ldots \oplus A_{p-j}^j \oplus D_k^{j-1}.$$

Le cas particulier où $k = 0$ fournit les décompositions de la condition *c*).

Entre autres, on a $M^p = A_0^p \oplus M^{p-1}$ et comme $M^p \neq M^{p-1}$, il suit que $A_0^p \neq \{0\}$.

D'après les propositions 13 et 15, pour tout $0 \leqslant k \leqslant p$, $L_k = A_k^{p+1-k} \oplus (D_k^{p-k} + L_{k+1}) = A_k^{p+1-k} \oplus (A_k^1 \oplus A_k^2 \oplus \ldots \oplus A_k^{p-k} \oplus D_{k+1}^{p-1}) + L_{k+1} = A_k^1 \oplus A_k^2 \oplus \ldots \oplus A_k^{p-k} \oplus L_{k+1}$, ce qui établit les décompositions *d*).

La restriction de f à L_p est évidemment un endomorphisme de L_p. C'est aussi un monomorphisme : car si $x \in L_p$ est tel que $f(x) = 0$, alors $x \in D_p^1 = D_p^0 = \{0\}$. De plus, quel que soit $n \geqslant 0$, la relation $L_p = A_p^1 \oplus L_{p+1}$ entraîne la relation $L_{p+n} = f^n(A_p^1) + L_{p+n+1}$. D'autre part $f^n(A_p^1) \cap L_{p+n+1} = \{0\}$; car si x est un élément de cette intersection, il existe au moins un $y \in A$ et un $z \in A_p^1$ tels que $f^{p+n+1}(y) = f^n(z) = x$. D'où $f^n(z - f^{p+1}(y)) = 0$, et $z - f^{p+1}(y) \in M^p$. Ainsi $z \in A_p^1 \cap (L_{p+1} + M^p) = \{0\}$; d'où $x = 0$. Par conséquent, $L_{p+n} = f^n(A_p^1) \oplus L_{p+n+1}$.

COROLLAIRE — *Soit p un entier $\geqslant 1$. Pour que f soit un* ν*-endomorphisme d'ordre p, il faut et il suffit que* $M^p \cap L_p = \{0\}$ *et que* $M^p \cap L_{p-1} \neq \{0\}$.

La condition est évidemment nécessaire. Car, si f est un ν-endomorphisme d'ordre p, d'après la proposition 16, $M^p \cap L_p = \{0\}$ et $M^p \cap L_{p-1} = A^1_{p-1} = \{0\}$.

Elle est aussi suffisante. Car, si $x \in M^p \cap L_p = \{0\}$, f est un ν-endomorphisme d'ordre $\leqslant p$. En effet, quel que soit $x \in M^p$, $f^p(x) \in M^1(f) \cap L_p(f) \subset M^p \cap L_p = \{0\}$, d'où $x \in M^p$. D'autre part, si $M^p \cap L_{p-1} \neq \{0\}$, il existe au moins un $y \in A$ et $\neq 0$ tel que $f^p(y) = 0$ et au moins un $x \in A$ et $\neq 0$ tel que $y = f^{p-1}(x)$. Alors $f^p(x) = f(y) \in L_p \cap M^{p-1} \subset L_p \cap M^p = \{0\}$, d'où $x \in M^p$ et $x \in M^{p-1}$, ce qui prouve que f est un ν-endomorphisme d'ordre p.

PROPOSITION 17 — *Soit f un* ν*-endomorphisme d'un espace vectoriel* A *sur un corps commutatif* Λ, *dont l'ordre p est* $\geqslant 1$. *On peut faire choix de deux sous-espaces vectoriels* A_1 *et* A_2 *de* A *et de deux endomorphismes f_1 et f_2 de* A *ayant les propriétés suivantes :*

a) $A = A_1 \oplus A_2$;

b) $f = f_1 + f_2$ *et* $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = 0$;

c) f_1 *est un endomorphisme nilpotent d'ordre p; pour tout* $n \geqslant 1$, $M^n(f_1) = A_2 \oplus M^n(f)$ *et* $L_n(f_1) = A_1 \cap L_n(f)$; *la restriction de* f_1 *à* A_1 *est un endomorphisme nilpotent d'ordre p de* A_1, *identique à la restriction de f à* A_1; *la restriction de* f_1 *à* A_2 *est l'endomorphisme nul de* A_2.

d) f_2 *est un* ν*-endomorphisme d'ordre* 1; *pour tout* $n \geqslant 1$, $M^n(f_2) = A_1$; *pour tout* $1 \leqslant n \leqslant p - 1$, $L_n(f_2) = A_2 \cap L_n(f)$, *tandis que, pour* $n \geqslant p$, $L_n(f_2) = L_n(f)$; *la restriction de* f_2 *à* A_2 *est un monomorphisme de* A_2 *dans* A_2, *identique à la restriction de f à* A_2; *la restriction de* f_2 *à* A_1 *est l'endomorphisme nul de* A_1;

e) dans la famille des sous-espaces vectoriels de A, *ordonnée par inclusion,* A_1 *est un élément minimal de la famille des sous-espaces vectoriels* B *tels que* $f^{-1}(B) \subset B$;

f) quels que soient les endomorphismes g_1 *et* g_2 *de* A, *les relations* $f = g_1 + g_2$, $g_1(A) \subset A_1$ *et* $g_2(A) \subset A_2$ *entraînent les relations* $f_1 = g_1$ *et* $f_2 = g_2$.

a) En effet, reprenant les notations de la proposition 16, on pose $A_1 = M^p(f)$ et $A_2 = A_0^{p+1} \oplus A_1^p \oplus A_2^{p-1} \oplus \ldots \oplus A_{p-1}^2 \oplus L_p$. Alors $A = A_1 \oplus A_2$ et il existe deux projections p_1 et p_2 de A,

telles que $a = p_1 + p_2$, $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$; $p_1(A) = A_1$ et $p_1^{-1}(0) = A_2$; $p_2(A) = A_2$ et $p_2^{-1}(0) = A_1$.

Quel que soit $x \in A$, il se met d'une manière et d'une seule sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in A_1$ et $x_2 \in A_2$. D'où $f(p_1(x)) = f(x_1)$, tandis que $p_1(f(x)) = p_1(f(x_1)) = f(x_1)$, puisque $f(A_1) \subset A_1$ et $f(A_2) \subset A_2$. De même $f(p_2(x)) = f(x_2)$ et $p_2(f(x)) = f(x_2)$. Donc $f \circ p_1 = p_1 \circ f$ et $f \circ p_2 = p_2 \circ f$.

b) On pose $f_1 = f \circ p_1$ et $f_2 = f \circ p_2$.

La relation $a = p_1 + p_2$ entraîne la relation $f = f \circ a = f \circ p_1 + f \circ p_2 = f_1 + f_2$; les relations $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$ entraînent les relations $f_1 \circ f_2 = f \circ p_1 \circ p_2 \circ f = 0$ et $f_2 \circ f_1 = f \circ p_2 \circ p_1 \circ f = 0$.

c) Quel que soit $n \geqslant 1$, $f_1^n = (f \circ p_1)^n = f^n \circ p_1$ et $f_1^n = p_1 \circ f^n$. D'où, si $x \in A_2$, $p_1(x) = 0$ et $f_1^n(x) = 0$; de même, si $x \in M^n(f)$, $f^n(x) = 0$ et $f_1^n(x) = 0$. Ainsi $A_2 \subset M^n(f_1)$ et $M^n(f) \subset M^n(f_1)$; donc $A_2 + M^n(f) = A_2 \oplus M^n(f) \subset M^n(f_1)$. Réciproquement, quel que soit $x \in M^n(f_1)$, en raison de la décomposition $x = x_1 + x_2$, $f_1^n(x) = f_1^n(x_1) + f_1^n(x_2) = f_1^n(x_1) = f^n(x_1) = 0$; d'où $x_1 \in M^n(f)$ et $x \in A_2 \oplus M^n(f)$. Par conséquent $M^n(f_1) = A_2 \oplus M^n(f)$.

En particulier, $M^p(f_1) = A_2 \oplus M^p(f) = A$ et $M^{p-1}(f_1) = A_2 \oplus M^{p-1}(f) \neq A_2 \oplus M^p(f) = A$; donc f_1 est un endomorphisme nilpotent d'ordre p.

Maintenant, soit $x \in A_1 \cap L_n(f)$. Il existe au moins un $y \in A$ tel que $f^n(y) = x$. D'où $f_1^n(y) = p_1(f^n(y)) = p_1(x) = x$ et $x \in L_n(f_1)$. Réciproquement, soit $x \in L_n(f_1)$; alors il existe au moins un $y \in A$, tel que $x = f_1^n(y)$. Or $f_1^n(y) = p_1(f^n(y)) \in A_1$ et $f_1^n(y) = f^n(p_1(y)) \in L_n(f)$. D'où $x \in A_1 \cap L_n(f)$, ce qui prouve que $L_n(f_1) = A_1 \cap L_n(f)$ pour tout $n \geqslant 1$.

Soit $x \in A_1$. Alors $f_1(x) = f(p_1(x)) = f(x) \in A_1$. Donc la restriction de f_1 à A_1 est un endomorphisme de A_1, identique à la restriction de f à A_1. De même, si $x \in A_2$, $f_1(x) = f(p_1(x)) = 0$. Donc la restriction de f_1 à A_2 est l'endomorphisme nul de A_2.

d) Quel que soit $n \geqslant 1$, $f_2^n = p_2 \circ f^n = f^n \circ p_2$.

Si $x \in A_1$, $f_2^n(x) = f^n(p_2(x)) = 0$, d'où $A_1 \subset M^n(f_2)$; de même, si $x \in M^n(f_2)$, $f_2^n(x) = f^n(x) = 0$ et $x \in M^n(f) \subset M^p(f) = A_1$. Donc $M^n(f_2) = A_1$. Or $M^p(f) = A_1 \neq \{0\}$. Par conséquent, f_2 est un ν-endomorphisme d'ordre 1 de A.

Quel que soit $x \in A$, $f_2^n(x) = f^n(p_2(x)) \in L_n(f))$ et $f_2^n(x) = p_2(f^n(x)) \in A_2$; donc $L_n(f_2) \subset L_n(f) \cap A_2$. Réciproquement, soit $x \in L_n(f)) \cap A_2$; il existe au moins un $y \in A$, tel que $f^n(y) = x$; mais $f_2^n(y) = p_2(f^n(y)) = p_2(x) = x$, ce qui entraîne que

$x \in L_n(f_2)$ et donc que $L_n(f_2) = L_n(f) \oplus A_2$. Dès lors, pour $n \geqslant p$, $L_n(f_2) = L_n(f)$.

Soit $x \in A_2$. Alors $f_2(x) = f(p_2(x)) = f(x)$. Donc la restriction de f_2 à A_2 est un endomorphisme de A_2, identique à la restriction de f à A_2. Soit alors $x \in A_2$ tel que $f_2(x) = 0$. Alors $f(x) = 0$, d'où $x = 0$. Donc la restriction de f_2 à A_2 est un monomorphisme de A_2.

Soit $x \in A_1$. Alors $f_2(x) = f_2(p_1(x)) = 0$. Donc la restriction de f_2 à A_1 est l'endomorphisme nul de A_1.

e) Soit $x \in A$ tel que $f(x) \in A_1$. Alors $f^p(f(x)) = 0$, d'où $x \in M^{p+1}(f) = M^p(f) = A_1$ et donc $f^{-1}(A_1) \subset A_1$.

Soit B un sous-espace vectoriel de A, tel que $f^{-1}(B) \subset B$. Alors pour tout $n \geqslant 1$, $f^{-n}(B) \subset B$. Ceci se démontre par récurrence sur n : car, si $f^{-(n-1)}(B) \subset B$, alors $f^{-1}(f^{-(n-1)}(B)) = f^{-n}(B) \subset f^{-1}(B) \subset B$. Donc, puisque $0 \in B$, $f^{-n}(0) \subset B$ et, en particulier, $f^{-p}(0) = M^p(f)) = A_1 \subset B$.

f) Soit g_1 et g_2 deux endomorphismes de A, tels que $f = g_1 + g_2$, $g_1(A) \subset A_1$ et $g_2(A) \subset A_2$.

Quel que soit $x \in A_2$, $f(x) = g_1(x) + g_2(x) = f_2(x)$; d'où $g_1(x) = f_2(x) - g_2(x) \in A_2$ et $g_1(x) \in A_1 \cap A_2 = \{0\}$. Donc la restriction de g_1 à A_2 est l'endomorphisme nul de A_2. On démontre de la même façon que la restriction de g_2 à A_1 est l'endomorphisme nul de A_1.

Alors, soit $x \in A$; d'où $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in A_1$ et $x_2 \in A_2$. $f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2) = g_1(x_1) + g_2(x_2)$ et $f_1(x_1) - g_1(x_1) = g_2(x_2) - f_2(x_2) \in A_1 \cap A_2 = \{0\}$. Ainsi $f_1(x_1) = g_1(x_1)$ et $f_2(x_2) = g_2(x_2)$ et donc f_1 est identique à g_1 et f_2 est identique à g_2.

On peut donner une réciproque de la proposition 17 :

PROPOSITION 18 — *Soit f_1 et f_2 deux endomorphismes d'un espace vectoriel* A *sur un corps commutatif* Λ *ayant les propriétés suivantes :*

a) $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = 0$;

b) f_1 *est nilpotent d'ordre* $p \geqslant 1$;

c) f_2 *est un* ν*-endomorphisme d'ordre* 1. *Dans ces conditions, leur somme* f *est un* ν*-endomorphisme d'ordre* $\leqslant p$; *pour tout* $1 \leqslant n \leqslant p - 1$, $M^n(f) = M^n(f_1) \cap M^1(f_2)$ *et* $L_n(f) + L_n(f_1) = L_n(f) + L_n(f_2) = L_n(f_1) \oplus L_n(f_2)$; *pour tout* $n \geqslant p$, $M^n(f) = M^1(f_2)$ *et* $L_n(f) = L_n(f_2)$.

En effet, les relations $f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2 = 0$ sont équivalentes aux relations $L_1(f_1) \subset M^1(f_2)$ et $L_1(f_2) \subset M^1(f_1)$. Alors $L_1(f_1) \cap L_1(f_2) \subset M^1(f_2) \subset L^1(f_2) = \{0\}$, puisque f_2 est un ν-endomorphisme d'ordre 1 (corollaire de la proposition 16). D'où, pour tout $n \geqslant 1$, $L_n(f_2) \subset L_1(f_1)$ et $L_n(f_2) \subset L_1(f_2)$ entraînent que $L_n(f_1) \cap L_n(f_2) \subset L_1(f_1) \cap L_1(f_2) = \{0\}$.

De même, parce que $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = 0$, $f^n = f_1^n + f_2^n$ pour tout $n \geqslant 1$. Or, d'une part, $M^n(f_1) \cap M^n(f_2) \subset M^n(f)$; d'autre part, si $f^n(x) = 0$, $f_1^n(x) = -f_2^n(x) \in L_n(f_1) \cap L_n(f_2) = \{0\}$; d'où $x \in M^n(f_1) \cap M^n(f_2)$. Il en résulte que $M^n(f) = M^n(f_1) \cap M^n(f_2)$ pour tout $n \geqslant 1$.

En particulier, pour $n \geqslant p$, $M^n(f_1) = A$ et $M^n(f) = M^n(f_2) = M^1(f_2)$. D'où f est un ν-endomorphisme d'ordre $\leqslant p$.

Enfin, pour tout $1 \leqslant n \leqslant p - 1$, $L_n(f) \subset L_n(f_1) + L_n(f_2) = L_n(f_1) \oplus L_n(f_2)$, tandis que pour $n \geqslant p$, $f^n = f_2^n$, d'où $L_n(f) = L_n(f_2)$. D'autre part, si $x \in L_n(f_1) \oplus L_n(f_2)$, il existe un x_1, et un seul, dans $L_n(f_1)$ et un x_2, et un seul dans $L_n(f_2)$, tels que $x = x_1 + x_2$; d'où il existe au moins un $y_1 \in A$ et un $y_2 \in A$, tels que $x_1 = f_1^n(y_1)$ et $x_2 = f_2^n(y_2)$. Alors $x = f_1^n(y_1) + f_2^n(y_2) = f^n(y_1) - f_2^n(y_1 - y_2) \in L_n(f) + L_n(f_2)$; de même $x = f^n(y_2) - f_1^n(y_2 - y_1) \in L_n(f) + L^n(f_1)$. D'où $L_n(f_1) \oplus L_n(f_2) \subset L_n(f) + L_n(f_1)$ et $L_n(f_1) \oplus L_n(f_2) \subset L_n(f) + L_n(f_2)$, ce qui achève de prouver que $L_n(f_1) \oplus L_n(f_2) = L_n(f) + L_n(f_1) = L_n(f) + L_n(f_1)$.

Parmi les ν-endomorphismes de A, on considère plus particulièrement ceux dont le noyau est de dimension finie. En d'autres termes, dans $\nu(A)$, on s'attache au sous-ensemble $\nu(A) \cap \alpha(A)$. La proposition suivante fournit une caractérisation des éléments de cette partie, laquelle est une précision ajoutée au théorème 1.

THÉORÈME 2 — *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel* A *sur un corps commutatif* Λ. *Pour que f ait un noyau de dimension finie et que la suite des noyaux des itérés de f ne compte qu'un nombre fini de sous-espaces vectoriels distincts, il faut et il suffit que f se décompose en la somme de deux endomorphismes* g_1 *et* g_2 *de* A, *tels que* :

a) g_1 *soit un monomorphisme de* A;

b) g_2 *soit de rang fini*;

c) $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$.

La condition est nécessaire.

En effet, si $f \in \mu(A)$, alors on prend $g_1 = f$ et $g_2 = 0$.

On suppose maintenant que l'ordre p du ν-endomorphisme f est $\geqslant 1$ et on reprend les notations de la proposition 17.

On pose $g_1 = f_2 + p_1$. $g_1 \in \mu(A)$. En effet, si $g_1(x) = 0$, $f_2(x) = -p_1(x)$, ou en vertu de la décomposition $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in A_1$ et $x_2 \in A_2$, $f_2(x_2) = -p_1(x_1) = -x_1 \in A_1 \cap A_2 = \{0\}$. D'où $f_2(x_2) = x_1 = 0$, et puisque la restriction de f_2 à A_2 est un monomorphisme, $x_2 = 0$, et donc $x = 0$.

On pose $g_2 = f_1 - p_1$. $g_2(A) = f_1(A) - p_1(A) \subset A_1$.

Réciproquement, si $x \in A_1$, $f^p(x) = 0$ et $x = p_1(x)$. D'où $x = p_1(x) = (p_1 \circ (a - f^p))(x) = ((p_1 \circ (a - f)) \circ (a + f + \ldots + f^{p-1}))(x)$. Or $p_1 \circ (a - f) = p_1 - f_1 = -g_2$; on pose $y = -(a + f + f^2 + \ldots + f^{p-1})(x)$; d'où $x = g_2(y)$. On en conclut que $g_2(A) = A_1$. Puisque $f \in \alpha(A)$, $f^p \in \alpha(A)$ et $\dim A_1 < \infty$. Donc $g_2 \in F(A)$.

Enfin, $g_1 \circ g_2 = f_1 - a$ et $g_2 \circ g_1 = f_1 - a$.

Pour établir que la condition est suffisante, il suffit d'établir la proposition suivante qui est plus générale.

Proposition 19 — *Soit g_1 et g_2 deux endomorphismes de* A *vérifiant les conditions suivantes* :

a) $g_1 \in \nu(A) \cap \alpha(A)$;

b) $g_2 \in F(A)$;

c) $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$.

Alors $g = g_1 + g_2 \in \nu(A) \cap \alpha(A)$.

On sait déjà que, pour tout $n \geqslant 1$, $g^n \in \alpha(A)$. Soit x tel que $g^n(x) = 0$. Alors, par la condition *c*), $g_1^n(x) = -g_2(n\, g_1^{n-1}(x) + \ldots + g_2^{n-1}(x)) \in g_2(A)$ et $x \in g_1^{-n}(g_2(A))$. Donc $M^n(g) \subset g_1^{-n}(g_2(A))$. Ainsi $\dim M^n(g) \leqslant \dim g_1^{-n}(g_2(A)) \leqslant \dim M^n(g_1) + \dim g_2(A)$. Or, puisque $g_1 \in \nu(A)$, il existe un entier p tel que $\dim M^n(g_1) \leqslant \dim M^p(g_1)$ pour tout $n \geqslant 0$. Par conséquent, les $(M^n(g))_{n \geqslant 0}$ forment une suite croissante de sous-espaces vectoriels de A, dont la dimension ne peut dépasser un entier fixe. Donc cette suite ne contient qu'un nombre fini d'éléments distincts et $g \in \nu(A)$.

Proposition 20 — *Quels que soient f et $g \in \nu(A) \cap \alpha(A)$ tels que $f \circ g = g \circ f$, alors $g \circ f \in \nu(A) \cap \alpha(A)$. Réciproquement, quels que soient f et $g \in L(A)$, tels que $g \circ f = f \circ g$, la relation $g \circ f \in \nu(A) \cap \alpha(A)$ entraîne les relations $f \in \nu(A) \cap \alpha(A)$ et $g \in \nu(A) \cap \alpha(A)$. En particulier, quel que soit $n \geqslant 0$, pour tout*

$f \in \nu(A) \cap \alpha(A)$, la relation $g^n = f$ entraîne la relation

$$g \in \nu(A) \cap \alpha(A).$$

Soit f, $g \in \nu(A) \cap \alpha(A)$. On sait déjà que $g \circ f \in \alpha(A)$ (prop. 2). Puisque $f \circ g = g \circ f$, $(g \circ f)^n = g^n \circ f^n$; d'où $M^n(g \circ f) \subset g^n(M^n(f))$ et $\dim M^n(g \circ f) \leq \dim g^n(M^n(f)) \leq \dim M^n(f) + \dim M^n(g)$. En particulier, quel que soit $n \in N$, si p (resp. q) représente l'ordre du ν-endomorphisme f (reps. g), $\dim M^n(g \circ f) \leq \dim M^p(f) + \dim M^q(g)$, ce qui prouve que $g \circ f \in \nu(A)$.

Réciproquement, soit $g \circ f \in \nu(A) \cap \alpha(A)$, d'ordre p; on sait déjà que f et $g \in \alpha(A)$ (cor. 1 de la prop. 2). De plus, quel que soit $n \geq 0$, $M^n(f) \subset M^p(g \circ f)$ et $M^n(g) \subset M^p(g \circ f)$; d'où $\dim M^n(f) \leq \dim M^p(g \circ f)$ et $\dim M^n(g) = \dim M^p(g \circ f)$, ce qui prouve que f et $g \in \nu(A)$.

6 — Endomorphismes a suite finie d'images itérées distinctes

Soit f un endomorphisme de A. On appelle suite des images itérées la suite $A = L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset \ldots \supset L_p \supset \ldots$ Si elle est composée d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels distincts, f sera dit un λ-endomorphisme de A.

D'après le corollaire 1 de la proposition 13, si f est un λ-endomorphisme, il existe un entier $\lambda(f)$ tel que $L_p = L_{p+1}$ pour tout $p < \lambda(f)$) et $L_p = L_{p+1}$ pour tout $p \geq \lambda(f)$. $\lambda(f)$ est appelé l'ordre du λ-endomorphisme f.

$\lambda(A)$ représente l'ensemble des λ-endomorphismes de A. Quel que soit $p \geq 0$, $\lambda_p(A)$ représente celui des λ-endomorphismes d'ordre p.

$\lambda_0(A) = \pi(A)$.

Si A est de dimension finie n, $\lambda_p(A) = \emptyset$ pour tout $n > p$; pour tout $0 < p \leq n$, $\lambda_p(A)$ contient, entre autres éléments, les endomorphismes nilpotents d'ordre p. De plus, pour tout $f \in \lambda_p(A)$, $M^q \neq M^{q+1}$ pour tout $q < p$ et $L_q = L_{q+1}$ pour tout $q \geq p$. Il n'en est pas nécessairement de même dans un espace vectoriel de dimension infinie.

Soit A un espace vectoriel à base infinie dénombrable $(a_n)_{n \geq 1}$. Quel que soit $p \geq 1$, l'endomorphisme f_p de A, défini par $f_p(a_{np+k}) = 0$ pour tout $n \geq 0$ et $k = 1$ et par $f_p(a_{np+k}) = a_{np+k-1}$ pour tout $n \geq 0$ et $2 \leq k \leq p$, est nilpotent d'ordre p; d'où

$f_p \in \lambda_p(A) \neq 0$. D'autre part, dans ce même espace A, l'application f définie par $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \to (0, x_3, x_4, x_5, \ldots)$ est telle que $A = L_n(f) \supset \Lambda(1, 0, 0, \ldots)$ pour tout $n \geq 1$, mais quel que soit $n \geq 0$, $M^n(f) \neq M^{n+1}(f)$.

PROPOSITION 21 — *a) Pour que f soit un λ-endomorphisme de A d'ordre p, il faut et il suffit que ${}^t f$ soit un ν-endomorphisme de A* d'ordre p.*

b) Pour que f soit un ν-endomorphisme de A d'ordre p, il faut et il suffit que ${}^t f$ soit un λ-endomorphisme de A d'ordre p.*

En effet, si f est un λ-endomorphisme d'ordre p, $L_q = L_{q+1}$ pour $q \geq p$, d'où $M^q({}^t f) = (L_q(f))^\perp = (L_{q-1}(f))^\perp = M^{q-1}({}^t f)$ et ${}^t f$ est un ν-endomorphisme d'ordre $\leq p$. De même, si f est un ν-endomorphisme d'ordre p, $M^q(f) = M^{q-1}(f)$ pour $q \geq p$; d'où $L_q({}^t f) = (M^q(f))^\perp = (M^{q-1}(f))^\perp = L_{q-1}({}^t f)$ et ${}^t f$ est un λ-endomorphisme d'ordre $\leq p$.

Ces deux remarques suffisent à établir la proposition. Car, dans le cas *a*), si f est un λ-endomorphisme d'ordre p, ${}^t f$ est un ν-endomorphisme d'ordre $p' \leq p$ et ${}^{tt} f$ est un λ-endomorphisme de A** d'ordre $p'' \leq p'$. Or ${}^{tt} f | A = f$. D'où $p'' = p'$ et $p' = p$. Réciproquement, si ${}^t f$ est un ν-endomorphisme de A* d'ordre p, ${}^{tt} f$ est un λ-endomorphisme de A** d'ordre $p' \leq p$; donc f est un λ-endomorphisme de A d'ordre $p'' \leq p$; alors ${}^t f$ est un ν-endomorphisme de A* d'ordre $p''' \leq p''$. D'où $p''' = p'' = p$, ce qui prouve le *a*).

On procède de la même façon pour établir le *b*).

PROPOSITION 22 — *Soit f un λ-endomorphisme de A d'ordre $q \geq 1$. Il existe $1,2\,(q-1)(q-2)$ sous-espaces vectoriels A_k^j $(1 \leq j,\ 0 \leq k,\ j + k \leq q + 1)$ tels que*

a) ils forment une famille linéairement indépendante;

b) $A_o^q \neq \{0\}$; $A_k^j \subset L_q$ *pour* $1 \leq j,\ 0 \leq k,\ j + k = q + 1$;

c) $M^j = A_o^j \oplus A_1^j \oplus \ldots \oplus A_{q-j+1}^j \oplus M^{j-1}$ $(1 \leq j \leq q + 1)$;

d) $L_k = A_k^1 \supset A_k^2 \supset \ldots \supset A_k^{q-k} \supset L_{k-1}$ $(0 < k < q - 1)$;

e) la restriction de f à A_k^j est un isomorphisme de A_k^j sur A_{k+1}^{j-1} $(2 \leq j,\ 0 \leq k,\ j + k \leq q + 1)$;

f) la restriction de f à L_q est un épimorphisme de L_q dont A_q^1 est le noyau.

En effet, soit $(A_k^j)_{1 \leq j,\ 0 \leq k,\ j+k \leq q}$ une famille de $1,2\,q\,(q+1)$

sous-espaces vectoriels de A vérifiant les conditions de la proposition 15 et soit $(A_k^j)_{1 \leqslant j,\, 0 \leqslant k,\, j+k-q+1}$ une famille de sous-espaces vectoriels de A vérifiant les conditions de la proposition 14.

Dès lors la famille $(A_k^j)_{1 \leqslant j,\, 0 \leqslant k,\, j+k \leqslant q+1}$ vérifient les conditions *a*) et *e*).

Soit encore $(B_k^j)_{1 \leqslant j,\, 0 \leqslant k,\, j+k=q+1}$ une famille de sous-espaces vectoriels de A vérifiant les conditions de la proposition 13. Or $L_q = L_{q+1}$; d'où $B_k^j = \{0\}$ et $L_k = D_k^{q-k} + L_{k+1}$ $(0 \leqslant k \leqslant q)$. Alors, pour $0 \leqslant k \leqslant q-1$, $L_k = (A_k^1 \oplus A_k^2 \oplus A_k^3 \oplus \ldots \oplus A_k^{q-k} \oplus D_{k+1}^{q-k}) + L_{k+1} = (A_k^1 \oplus A_k^2 \oplus \ldots \oplus A_k^{q-k}) \oplus L_{k+1}$, puisque $D_{k+1}^{q-k} \subset L_{k+1}$ et que $A_k^j \cap L_{k+1} = \{0\}$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant q-k$. En particulier $L_{q-1} = A_{q-1}^1 \oplus L_q$, et puisque $L_{q-1} \neq L_q$, on a $A_{q-1}^1 \neq \{0\}$, ce qui entraîne $A_0^q \neq \{0\}$, puisque ces deux sous-espaces vectoriels sont isomorphes.

Encore, pour $1 \leqslant j \leqslant q$, d'après la condition *b*) de la proposition 15, $D_0^j = M^j = (A_0^j \oplus A_1^j \oplus \ldots \oplus A_{q-j}^j \oplus D_0^{j-1}) + D_{q-j+1}^j = (A_0^j \oplus A_1^j \oplus \ldots \oplus A_{q-j}^j \oplus D_0^{j-1}) + (A_{q-j+1}^j \oplus D_{q-j+1}^{j-1}) = (A_0^j \oplus A_1^j \oplus \ldots \oplus A_{q-j}^j \oplus A_{q-j+1}^j) \oplus D_0^{j-1}$. Pour $j = q+1$ par contre, on a $M^{q+1} = A_0^{q+1} \oplus M^q$, ce qui prouve la condition *d*).

La restriction de f à L_q est évidemment un endomorphisme de L_q. Maintenant soit $x \in L_q$. Alors il existe au moins un $y \in L_{q-1}$ tel que $f(y) = x$ et donc un $y' \in A_{q-1}^1$ et un $y'' \in L_q$, tels que $y = y' + y''$. $f(y'') = f(y) - f(y') = x$, ce qui prouve que f est aussi un épimorphisme de L_q. Le noyau de la restriction de f à L_q est identique à $L_q \cap M^1 = D_q^1 = A_q^1$.

COROLLAIRE — *Soit q un entier* $\geqslant 1$. *Pour que f soit un* λ*-endomorphisme d'ordre q, il faut et il suffit que* $A = L_q + M^q$ *et que* $L_q + M^{q-1} \neq A$.

La condition est nécessaire. Car il résulte de la proposition que $A = L_q + M^q$, $A_0^q \neq \{0\}$ et que $A = A_0^q \oplus (L_q + M^{q-1})$, d'où $L_q + M^{q-1} \neq A$.

Elle est aussi suffisante. Car la relation $A = L_q + M^q$ entraîne que f est un λ-endomorphisme d'ordre $\leqslant q$. En effet, soit $x \in L_q$; il existe au moins un $y \in A$, tel que $x = f^q(y)$ et au moins un $y' \in M^q$ et un $y'' \in L_q$ tels que $y = y' + y''$. Alors $x = f^q(y' + y'') = f^q(y'') \in L_{2q} \subset L_{q+1}$. D'autre part, la relation $L_q + M^{q-1} \neq A$ entraîne que $L_{q-1} \neq L_q$. Car, soit $x \neq 0$ un élément du supplémentaire algébrique, par hypothèse $\neq \{0\}$, de $L_q + M^{q-1}$ dans A. $f^{q-1}(x) \in L_{q-1}$. Or, si $f^{q-1}(x) \in L_q$, il y aurait au moins un $y \in A$

tel que $f^{q-1}(x) = f^{2q-1}(y)$; d'où $f^{q-1}(x - f^q(y)) = 0$ ou $x \in f^q(y) + M^{q-1} \subset L_q + M^{q-1}$, ce qui entraînerait une contradiction.

PROPOSITION 23 — *Soit f un λ-endomorphisme d'un espace vectoriel A sur un corps commutatif Λ, dont l'ordre q est $\geqslant 1$. On peut faire choix de deux sous-espaces vectoriels A_1 et A_2 de A et de deux endomorphismes f_1 et f_2 de A ayant les propriétés suivantes :*

a) $A = A_1 \oplus A_2$;

b) $f = f_1 + f_2$; $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = 0$;

c) *f_1 est un endomorphisme nilpotent d'ordre q; pour tout $n \geqslant 1$,* $M^n(f_1) = A_2 + M^n(f)$ *et* $L_n(f_1) = A_1 \cap L_n(f)$; *la restriction de f_1 à A_1 est un endomorphisme nilpotent d'ordre q de A_1, identique à la restriction de f à A_1; la restriction de f à A_2 est l'endomorphisme nul de A_2;*

d) *f_2 est un λ-endomorphisme d'ordre 1; pour tout $n \geqslant 1$,* $M^n(f_2) = A_1 + M^n(f)$ *et* $L_n(f_2) = A_2$; *la restriction de f_2 à A_2 est un épimorphisme de A_2 sur A_2, identique à la restriction de f à A_2; la restriction de f_2 à A_1 est l'endomorphisme nul de A_1;*

e) *dans la famille des sous-espaces vectoriels de A, ordonnée par inclusion, A_2 est un élément maximal de la famille des sous-espaces vectoriels B tels que* $B \subset f(B)$;

f) *quels que soient les endomorphismes g_1 et g_2 de A, les relations $f = g_1 + g_2$, $g_1(A) \subset A_1$ et $g_2(A) \subset A_2$ entraînent les relations $f_1 = g_1$ et $f_2 = g_2$.*

a) En effet, reprenant les notations de la proposition 22, on pose $A_2 = L_q(f)$ et on prend pour A_1 le sous-espace vectoriel de A, somme directe des sous-espaces vectoriels $(A_k^j)_{1 \leqslant j,\, 0 \leqslant k,\, j+k \leqslant q}$. Ainsi $A = A_1 \oplus A_2$.

Il existe deux projections p_1 et p_2 de A, telles que $a = p_1 + p_2$, $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$; $p_1(A) = A_1$, $p_1^{-1}(0) = A_2$; $p_2(A) = A_2$ et $p_2^{-1}(0) = A_1$.

Quel que soit $x \in A$, il se met d'une manière et d'une seule sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in A_1$ et $x_2 \in A_2$. D'où $f(p_1(x)) = f(x_1)$ et $f(p_2(x)) = f(x_2)$. D'autre part, puisque $f(A_1) \subset A_1$ et $f(A_2) \subset A_2$, on a $p_1(f(x)) = f(x_1)$ et $p_2(f(x)) = f(x_2)$. Donc $f \circ p_1 = p_1 \circ f$ et $f \circ p_2 = p_2 \circ f$.

b) On pose $f_1 = f \circ p_1$ et $f_2 = f \circ p_2$, d'où les relations annoncées.

c) Comme dans la proposition 17, on établit que, pour tout $n \geqslant 1$, $M^n(f_1) = M^n(f) + A_2$. Alors $M^{q-1}(f_1) = M^{q-1}(f) + A_2 = M^{q-1}(f) + L_q(f) \neq M^q(f) + L_q(f) = M^q(f_1) = A$, ce qui montre que f_1 est un endomorphisme nilpotent d'ordre q.

De la même manière que dans la proposition 17, on prouve que, pour tout $n \geqslant 1$, $L_n(f_1) = A_1 \cap L_n(f)$ ainsi que les autres assertions de l'énoncé *c*).

d) Si $x \in A_1$, $f_2^n(x) = f^n(p_2(x)) = 0$; si $x \in M^n(f))$, $f_2^n(x) = p_2(f^n(x)) = 0$; donc $A_1 + M^n(f) \subset M^n(f_2)$. Réciproquement, soit $x \in M^n(f_2)$; en raison de la décomposition $x = x_1 + x_2$, $f_2^n(x) = f_2^n(x_1) + f_2^n(x_2) = f_2^n(x_2) = f^n(x_2) = 0$; d'où $x_2 \in M^n(f)$ et $x \in A_1 + M^n(f)$. Par conséquent $M^n(f_2) = A_1 + M^n(f)$ pour tout $n \geqslant 1$.

Comme dans la proposition 17, on prouve que, pour tout $n \geqslant 1$, $L_n(f_2) = A_2 + L_n(f)$.

Puisque pour $1 \leqslant n \leqslant q$, $L_n(f) \subset A_2$ et que pour $n > q$, $L_n(f) = L_q(f) = A_2$, il suit que $L_n(f_2) = A_2$ pour tout $n \geqslant 1$. Puisque $L_q(f) = A_2 \neq A$, f_2 est un λ-endomorphisme d'ordre 1.

Les autres énoncés contenus *sub litt. d*) se prouvent comme ceux correspondants de la proposition 17.

e) On a évidemment $A_2 = L_q(f) = L_{q+1}(f) = f(A_2)$.

Soit B un sous-espace vectoriel de A tel que $B \subset f(B)$. Alors, quel que soit $n \geqslant 1$, $B \subset f^n(B)$ et, en particulier pour $n \geqslant q$, $B \subset f^n(B)$ et, en particulier pour $n \geqslant q$, $B \subset f^n(B) \subset f^n(A) = L_q(f) = A_2$, ce qui achève de prouver que A_2 est un élément maximal dans la famille, ordonnée par inclusion, des sous-espaces vectoriels B de A, tels que $B \subset f(B)$.

g) On fait la même preuve que pour l'énoncé correspondant de la proposition 17.

PROPOSITION 24 — *Soit f_1 et f_2 deux endomorphismes d'un espace vectoriel* A *sur un corps commutatif* Λ *ayant les propriétés suivantes* :

a) $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = 0$;

b) *f_1 est nilpotent d'ordre $q \geqslant 1$*;

c) *f_2 est un λ-endomorphisme d'ordre* 1.

Dans ces conditions, leur somme f est un λ-endomorphisme d'ordre $\leqslant q$; pour tout $1 \leqslant n \leqslant q - 1$, $L_n(f) = L_n(f_1) + L_n(f_2)$ et $M^n(f) \cap M^n(f_1) = M^n(f) \cap M^n(f_2) = M^n(f_1) \cap M^n(f_2)$; pour tout $n \geqslant q$, $L_n(f) = L_1(f_2)$ et $M^n(f) = M^n(f_2)$.

En effet $L_n(f) \subset L_n(f_1) + L_n(f_2)$ pour tout $n \geqslant 1$. Réciproquement, si $x \in L_n(f_1)$, il existe au moins un $y \in A$ tel que $f_1^n(y) = x$. Or $y = y' + y''$ avec $y' \in M^1(f_2)$ et $y'' \in L'(f_2)$ (cor. de la propos. 22). D'où $x = f_1^n(y') + f_1^n(y'') = f_1^n(y')$ et $f^n(y') = f_1^n(y') + f_2^n(y') = f_1^n(y') = x$, ce qui entraîne que $L_n(f_1) \subset L(f)$. D'autre part, si $x \in L_1(f_2)$, alors il existe au moins un $y \in L_1(f_2)$ tel que $x = f_2^n(y)$ (f de la proposition 22; d'où $f_n(y) = f_1^n(y) + f_2^n(y) = f_2^n(y) = x$ et $L_1(f_2) \subset L_n(f)$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $L_n(f) = L_n(f_1) + L_1(f_2)$. En particulier, pour tout $n \geqslant q$, $L_n(f) = L_1(f_2)$, ce qui établit que f est un λ-endomorphisme d'ordre $\leqslant q$.

Dans le sous-ensemble $\lambda(A)$ de $L(A)$, on s'attache plus spécialement à la partie $\lambda(A) \cap \beta(A)$, c'est-à-dire aux λ-endomorphismes de A dont l'image est de codimension finie dans A. Le théorème suivant apporte une précision au théorème 1.

THÉORÈME 3 — *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel* A *sur un corps commutatif* Λ. *Pour que f ait une image de codimension finie et que la suite des images des itérés de f ne compte qu'un nombre fini de sous-espaces vectoriels distincts, il faut et il suffit que f se décompose en la somme de deux endomorphismes g_1 et g_2 de* A, *tels que* :

a) g_1 *soit un épimorphisme de* A;

b) g_2 *soit de rang fini*;

c) $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$.

La condition est nécessaire. C'est évident dans le cas où $f \in \pi(A)$, où l'on prend $g_1 = f$ et $g_2 = 0$. C'est encore vrai dans le cas où f est un λ-endomorphisme d'ordre $q \geqslant 1$. En effet, en reprenant les notations de la proposition 23, on pose $g_1 = f_2 + p_1$. $g_1 \in \pi(A)$. Car, soit $y \in A$; alors $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in A_1$ et $y_2 \in A_2$. Puisque la restriction de f_2 à A_2 est un épimorphisme de A_2 sur A_2, il existe au moins un $x_2 \in A_2$ tel que $f_2(x_2) = y_2$. Ainsi $g_1(x_2 + y_1) = f_2(x_2) + p_1(y_1) = y_2 + y_1 = y$, ce qui prouve que g_1 est une application de A sur A.

On pose $g_2 = f_1 - p_1 \cdot g_2(A) \subset A_1$. Comme au théorème 2, on établit que $g_2(A) = A_1$. Puisque $f \in \beta(A)$, $f^q \in \beta(A)$ et $\dim A_1 < \infty$. Donc $g_2 \in F(A)$.

Pour établir que la condition est suffisante, il suffit d'établir la proposition suivante qui est plus générale.

Proposition 25 — *Soit* g_1 *et* g_2 *deux endomorphismes de* A *vérifiant les conditions suivantes* :

a) $g_1 \in \lambda(A) \cap \beta(A)$;

b) $g_2 \in F(A)$;

c) $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$.

Alors $g = g_1 + g_2 \in \lambda(A) \cap \beta(A)$.

En effet, ${}^t g_1 \in \nu(A^*) \cap \alpha(A^*)$ (prop. 21 *a*) et prop. 5 *a*)), ${}^t g_2 \in F(A^*)$ et ${}^t g_1 \circ {}^t g_2 = {}^t g_2 \circ {}^t g_1$. Donc ${}^t g \in \nu(A^*) \cap \alpha(A^*)$ et $g \in \lambda(A) \cap \beta(A)$.

Proposition 26 – *Quels que soient* f *et* $g \in \lambda(A) \cap \beta(A)$ *tels que* $f \circ g = g \circ f$, *alors* $g \circ f \in \lambda(A) \cap \beta(A)$. *Réciproquement, quels que soient* f *et* $g \in L(A)$ *tels que* $g \circ f = f \circ g$, *la relation* $g \circ f \in \lambda(A) \cap \beta(A)$ *entraînent les relations* $f \in \lambda(A) \cap \beta(A)$ *et* $g \in \lambda(A) \cap \beta(A)$. *En particulier, quel que soit* $n \geqslant 0$, *pour tout* $f \in \lambda(A) \cap \beta(A)$, *la relation* $g^n = f$ *entraîne la relation* $g \in \lambda(A) \cap \beta(A)$.

C'est la proposition duale de la proposition 20, et elle se prouve à partir de celle-ci en tenant compte des propositions 5 *a*) et 21 *a*).

7 — Endomorphismes a suite finie de noyaux itérés distincts et a suite finie d'images itérées distinctes

Désormais, on convient d'appeler ν-endomorphisme d'ordre infini un endomorphisme f de A, tel que, pour tout $p \geqslant 0$, $M^p(f) \neq M^{p+1}(f)$, et de représenter par $\nu^\infty(A)$ l'ensemble des ν-endomorphismes de A d'ordre infini. Ainsi donc, la suite dénombrable $(\nu^p(A))_{0 \leqslant p \leqslant \infty}$ constitue une partition de L(A).

De même, on convient d'appeler λ-endomorphisme d'ordre infini un endomorphisme f de A tel que, pour tout $q \geqslant 0$, $L_q(f) \neq L_{q+1}(f)$, et de représenter par $\lambda_\infty(A)$ l'ensemble des λ-endomorphismes de A d'ordre infini. La suite dénombrable $(\lambda_p(A))_{0 \leqslant p \leqslant \infty}$ constitue une partition de L(A).

On pose $\rho_q^p(A) = \nu^p(A) \cap \lambda_q(A)$ $(0 \leqslant p, q \leqslant \infty)$.

Proposition 27 — *a*) $\rho_q^0 = \varnothing$ *sauf pour* $q = 0$ *et* $q = \infty$; $\rho_0^0 = \omega(A)$ *et* $\rho_\infty^0 = \mu(A) \cap \bigcap \pi(A)$;

b) $\rho_0^p = \varnothing$ *sauf pour* $p = 0$ *et* $p = \infty$; $\rho_0^\infty = \pi(A) \cap \bigcap \mu(A)$;

c) *pour* $1 \leqslant p, q < \infty$, $\rho_q^p = \varnothing$ *pour* $p \neq q$.

a) Si $f \in \varrho_q^0$, f est un monomorphisme. Alors ou bien f est un épimorphisme et $f \in \omega(A)$, ou bien f n'est pas un épimorphisme et $f \in \lambda_\infty(A)$ [1, prop. 5]. D'où $\varrho_0^0 = \omega(A)$, $\varrho_q^0 = \varnothing$ pour $1 \leqslant q < \infty$ et $\varrho_\infty^0 = \mu(A) \cap \bigcap \pi(A)$.

b) Si $f \in \varrho_0^p$, f est un épimorphisme. Alors ou bien f est un monomorphisme et $f \in \omega(A)$, ou bien f n'est pas un monomorphisme et $f \in \nu^\infty(A)$ [1, prop. 3]. D'où $\varrho_0^p = \varnothing$ pour $1 \leqslant p < \infty$ et $\varrho_0^\infty = \pi(A) \cap \bigcap \mu(A)$.

c) Soit $f \in \nu^p(A)$ où $p < \infty$. En reprenant les notations de la proposition 16, on voit que, puisque tous les sous-espaces vectoriels A_k^j $(1 \leqslant j, \quad 0 \leqslant k, \quad j + k = p)$ sont $\neq \{0\}$, $L_k \neq L_{k+1}$ pour $0 \leqslant k \leqslant p - 1$. D'où f est un λ-endomorphisme, soit d'ordre infini, soit d'ordre fini $\geqslant p$. Or si $f \in \lambda_q(A)$ avec $q > p$, on aura $L_{q+1} = f^{q-p+1}(A_p^1) \oplus L_q = L_q$, d'où $f^{q-p+1}(A_p^1) = \{0\}$ et puisque $A_p^1 \subset L_p$ et que la restriction de f à L_p est un monomorphisme, il suit que $A_p^1 = \{0\}$ et que $L_p = L_{p+1}$, ce qui est une contradiction. D'où, si $1 \leqslant p, q < \infty$, $\varrho_q^p = \varnothing$ pour $p \neq q$.

Si $f \in \varrho_p^p(A)$, où $1 \leqslant p < \infty$, f sera dit un ϱ-endomorphisme de A et p sera appelé l'ordre de f, considéré comme ϱ-endomorphisme. $\varrho(A) = \bigcup_{0 \leqslant p < \infty} \varrho_p^p$; c'est l'intersection des ensembles $\nu(A)$ $\lambda(A)$. La proposition suivante a été prouvée — d'une manière différente — par M. Hukuhara [2].

PROPOSITION 28 — *Soit f un ϱ-endomorphisme d'ordre $p \geqslant 1$. Il existe $1/2\, p\,(p-1)$ sous-espaces vectoriels $(A_k^j)_{1 \leqslant j,\, 0 \leqslant k,\, j+k \leqslant p}$ de* A, *tels que* :

a) *ils forment une famille linéairement indépendante*;

b) $A_0^p \neq \{0\}$;

c) $M^j = A_0^j \oplus A_1^j \oplus \ldots \oplus A_{p-j}^j \oplus M^{j-1} \quad (1 \leqslant j \leqslant p)$;

d) $L_k = A_k^1 \oplus A_k^2 \oplus \ldots \oplus A_k^{p-k} \oplus L_{k+1} \quad (0 \leqslant k \leqslant p-1)$;

e) *la restriction de f à A_k^j est un isomorphisme de A_k^j sur A_{k+1}^{j-1}* $(2 \leqslant j, 0 \leqslant k, j + k \leqslant p)$;

f) *la restriction de f à L_p est un automorphisme de L_p.*

En effet, si l'on se reporte à la proposition 16, on constate que les sous-espaces vectoriels (A_k^j) $(1 \leqslant j, \quad 0 \leqslant k, \quad j + k = p + 1)$

que l'on y a introduits, sont tous identiques à $\{0\}$, puisque $A_p^1 = \{0\}$ et qu'ils lui sont tous isomorphes. Dès lors, les conditions *a*) à *e*) de la proposition 16, dûment modifiées, restituent les conditions *a*) à *e*) de notre proposition. Enfin, on sait déjà que f est un monomorphisme de L_p dans L_p et puisque $A_p^1 = \{0\}$, $f(L_p) = L_p$, d'où f est aussi un épimorphisme de L_p.

COROLLAIRE — *Soit p un entier $\geqslant 1$. Si f est un ρ-endomorphisme d'ordre p, $A = M^p \oplus L_p$.*

En effet, f est un ν-endomorphisme d'ordre p; donc $M^p \cap L_p = \{0\}$ (cor. prop. 16). f est aussi un λ-endomorphisme d'ordre p; donc $A = M^p + L_p$ (cor. prop. 22). En conséquence $A = M^p \oplus L_p$.

PROPOSITION 29 — *Soit f un ρ-endomorphisme d'un espace vectoriel A sur un corps commutatif Λ, dont l'ordre p est $\geqslant 1$. On peut faire choix de deux sous-espaces vectoriels A_1 et A_2 de A et de deux endomorphismes f_1 et f_2 de A ayant les propriétés suivantes :*

a) $A = A_1 \oplus A_2$;

b) $f = f_1 + f_2$ *et* $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = 0$;

c) f_1 *est un endomorphisme nilpotent d'ordre p; pour tout $n \geqslant 1$,* $M^n(f_1) = A_2 \oplus M^n(f)$ *et* $L_n(f_1) = A_1 \cap L_n(f)$; *la restriction de f_1 à A_1 est un endomorphisme nilpotent d'ordre p de A_1, identique à la restriction de f à A_1; la restriction de f_1 à A_2 est l'endomorphisme nul de A_2.*

d) f_2 *est un ρ-endomorphisme d'ordre* 1; *pour tout $n \geqslant 1$,* $M^n(f_2) = A_1$, et $L_n(f_2) = A_2$; *la restriction de f_2 à A_2 est un automorphisme de A_2, identique à la restriction de f à A_2; la restriction de f_2 à A_1 est l'endomorphisme nul de A_1;*

e) *dans la famille des sous-espaces vectoriels de* A, *ordonnée par l'inclusion, A_1 est un élément minimal de la famille des sous-espaces vectoriels* B *tels que* $f^{-1}(B) \subset B$ *et A_2 est un élément maximal de la famille des sous-espaces vectoriels* C *tels que* $C \subset f(C)$;

f) *quels que soient les endomorphismes g_1 et g_2 de* A, *les relations* $f = g_1 + g_2$, $g_1(A) \subset A_1$ *et* $g_2(A) \subset A_2$ *entraînent les relations* $f_1 = g_1$ *et* $f_2 = g_2$.

Pour le prouver, il suffit de modifier la preuve de la proposition 17 en observant que A_2 y est identique à $L_p(f)$. La seconde partie du *e*) est une conséquence directe de la proposition 23, ainsi que

le fait que f_2 est non seulement un monomorphisme de A_2, mais encore un épimorphisme.

La proposition suivante constitue la réciproque de la proposition 29.

PROPOSITION 30 — *Soit f_1 et f_2 deux endomorphismes d'un espace vectoriel* A *sur un corps commutatif* Λ *ayant les propriétés suivantes* :

a) $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = 0$;

b) f_1 *est nilpotent d'ordre* $p \geqslant 1$;

c) f_2 *est un* ρ*-endomorphisme d'ordre* 1.

Dans ces conditions, leur somme f est un ρ*-endomorphisme d'ordre p; pour tout* $1 \leqslant n \leqslant p-1$, $M^n(f) = M^n(f_1) \cap M^1(f_2)$ *et* $L_n(f) = L_n(f_1) \oplus L_1(f_2)$; *pour tout* $n \geqslant p$, $M^n(f) = M^1(f_2)$ *et* $L_n(f_2) = L_1(f_2)$.

En effet, pour tout $1 \leqslant n \leqslant p-1$, $M^n(f_1) \cap M^1(f_2) = M^n(f)$ (prop. 18) et $L_n(f_1) \oplus L_1(f_2) = L_n(f)$ (prop. 24); pour $n \geqslant p$, $M^1(f_2) = M^n(f)$ et $L_1(f_2) = L_n(f)$. Puisque pour tout $n \leqslant p-1$, $L_n(f_1) \neq L_{n+1}(f_1)$, il suit que f est un ρ-endomorphisme d'ordre p.

Si $f \in \rho(A) \cap \alpha(A)$, alors, d'après la proposition 28, quel que soit $n \geqslant 0$, codim $L_n(f) < \infty$ et codim $L_n(f) = \dim M^n(f)$; d'où $f \in \sigma(A)$ et $\varkappa(f) = 0$. De même, si $f \in \rho(A) \cap \beta(A)$, $\dim M^n(f) = \text{codim } L_n(f) < \infty$ et $f \in \sigma(A)$ avec $\varkappa(f) = 0$. Ce sont les endomorphismes $f \in \rho(A) \cap \sigma(A)$ que l'on appellera des *endomorphismes de Riesz*. La terminologie s'inspire de [1].

THÉORÈME 4 — *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel* A *sur un corps commutatif* Λ. *Pour que f soit un endomorphisme de Riesz, il faut et il suffit qu'il se décompose en la somme de deux endomorphismes g_1 et g_2 de* A, *tels que* :

a) g_1 *soit un automorphisme de* A;

b) g_2 *soit de rang fini*;

c) $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$.

La condition est nécessaire.

En effet, si $f \in \omega(A)$, on prend $g_1 = f$ et $g_2 = 0$.

Si f est un endomorphisme de Riesz d'ordre $p \geqslant 1$, en reprenant les notations de la proposition 29, on pose $g_1 = f_2 + p_1$ et $g_2 = f_1 - p_1$. Comme dans le théorème 2 (resp. 3), on prouve que g_1 est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) de A.

Et de la même manière, on montre que $g_2 \in F(A)$ et que $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$.

La condition est suffisante. Pour le voir, il suffit d'établir la proposition suivante.

PROPOSITION 31 — *Soit* g_1 *et* g_2 *deux endomorphismes de* A *vérifiant les conditions suivantes* :

a) $g_1 \in \rho(A) \cap \sigma(A)$;

b) $g_2 \in F(A)$;

c) $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$.

Alors $g = g_1 + g_2 \in \rho(A) \cap \sigma(A)$.

En effet, si $g_1 \in \rho(A) \cap \sigma(A)$, alors $g_1 \in \nu(A) \cap \varkappa(A)$ et $g \in \nu(A) \cap \varkappa(A)$ (prop. 19). De même, $g_1 \in \lambda(A) \cap \beta(A)$ et $g \in \lambda(A) \cap \beta(A)$ (prop. 25). Donc $g \in \rho(A) \cap \sigma(A)$.

On a défini les endomorphismes de Riesz comme les éléments de l'ensemble $\rho(A) \cap \sigma(A)$. On peut proposer des conditions apparemment plus faibles qui les définissent encore.

PROPOSITION 32 — *Pour un endomorphisme* f *d'un espace vectoriel* A *sur un champ commutatif* Λ, *les trois propriétés suivantes sont équivalentes* :

a) f *est un endomorphisme de Riesz d'ordre* p;

b) $f \in \sigma(A) \cap \lambda_p(A)$ *et* $\varkappa(f) \leqslant 0$;

c) $f \in \sigma(A) \cap \nu^p(A)$ *et* $\varkappa(f) \geqslant 0$.

a) entraîne *b*) et *c*).

b) entraîne *a*). En effet, puisque $f \in \sigma(A)$ et $\varkappa(f) \leqslant 0$, $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in \mu(A)$ et $f_2 \in F(A)$ (théorème 1). D'où puisque $F(A)$ est un idéal de $L(A)$, $f^p = f_1^p + g'$ avec $g' \in F(A)$ et $f^{p+1} = f_1^{p+1} + g''$ avec $g'' \in F(A)$. f^p et $f^{p+1} \in \sigma(A)$ (cor. 2 de la prop. 9) et $\varkappa(f^p) = \varkappa(f_1^p)$, $\varkappa(f^{p+1}) = \varkappa(f_1^{p+1})$ (prop. 10). Ainsi $m_p(f) - l_p(f) = -l_p(f_1)$ et $m_{p+1}(f) - l_{p+1}(f) = -l_{p+1}(f_1)$, puisque f_1^p et $f_1^{p+1} \in \mu(A)$. En retranchant membre à membre ces deux égalités, on a $-d_{p+1}(f) + c_{p+1}(f) = c_{p+1}(f_1)$. Or, comme $f \in \lambda_p(A)$, $c_{p+1}(f) = 0$, d'où le premier membre de la dernière égalité est $\leqslant 0$, tandis que le second est $\geqslant 0$. Il en résulte que $d_{p+1}(f) = 0$, ou que f est un ν-endomorphisme de A d'ordre $\leqslant p < \infty$. Alors, en vertu de la proposition 27 *c*), $f \in \rho_p^p(A)$ et f est un endomorphisme de Riesz d'ordre p.

Pour prouver que *c*) entraîne *a*), on observe que les hypothèses

impliquent que ${}^t f \in \sigma(A^*) \cap \lambda_p(A^*)$ et que $\varkappa({}^t f) \leqslant 0$. Alors, d'après ce qu'on vient d'établir ${}^t f$ est un endomorphisme de Riesz sur A^* d'ordre p. Donc f est un endomorphisme de Riesz sur A d'ordre p. En effet,

PROPOSITION 33 — *Pour qu'un endomorphisme f d'un espace vectoriel* A *sur un corps commutatif* Λ *soit un endomorphisme de Riesz d'ordre $p \geqslant 0$, il faut et il suffit que son transposé ${}^t f$ soit un endomorphisme de Riesz sur* A^* *d'ordre p.*

Car, pour que $f \in \lambda_p(A) \cap \nu^p(A) \cap \sigma(A)$, il faut et il suffit que ${}^t f \in \nu^p(A^*) \cap \lambda_p(A^*) \cap \sigma(A^*)$ (prop. 21 et 7).

PROPOSITION 34 — *Quels que soient f et $g \in \rho(A) \cap \sigma(A)$ tels que $f \circ g = g \circ f$, alors $g \circ f \in \rho(A) \cap \sigma(A)$. Réciproquement, quels que soient f et $g \in L(A)$ tels que $g \circ f = f \circ g$, la relation $g \circ f \in \rho(A) \cap \sigma(A)$ entraîne les relations $f \in \rho(A) \cap \sigma(A)$ et $g \in \rho(A) \cap \sigma(A)$. En particulier, quel que soit $n \geqslant 0$, pour tout $f \in \rho(A) \cap \sigma(A)$, la relation $g^n = f$ entraîne la relation $g \in \rho(A) \cap \sigma(A)$.*

Cette dernière proposition est une conséquence immédiate des propositions analogues 20 et 26.

RÉFÉRENCES

[1] A. DEPRIT, Endomorphismes de Riesz, *Ann. Soc. Scient. de Bruxelles* **70**, (1956), 165-184.

[2] M. HUKUHARA, Théorie des endomorphismes de l'espace vectoriel *Journ. Fac. Sc. Univ. Tokyo* **7**, (1954), 129-192.

[3] G. KÖTHE, Zür Theorie der compakten Operatoren in lokalkonvexen Räumen, *Part. Math.* **13** (1954), 97-104.

[4] H. SCHAEFER, Ueber singuläre Integralgleichungen und eine Klasse von Homomorphismen in lokalkonvexen Räumen, *Math. Zeitsch.* **66**, (1956), 147-163.

[5] L. SCHWARTZ, Homomorphismes et applications complètement continues, *C. R. Paris* **236**, (1953), 2472-2473.

[6] B. YOOD, Properties of linear transformations preserved under addition of a completely continuous transformation, *Duke Math. Journ.* **18** (1951, 599-612.

Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Tome 71, n° I, p. 44-52

Deuxième Section

SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES

Effet de la dissymétrie Est-Ouest sur la répartition des branches rapides des étoiles produites dans les émulsions nucléaires par les rayons cosmiques *

PAR

MAX MORAND - C. BEETS[1] - Y. ROBINET[2] - L. WINAND

1) Position du problème

1.1 — L'évidence d'une dissymétrie E-W dans la répartitition des traces isolées dues aux rayons cosmiques dans les émulsions nucléaires, l'étude et la mesure de cette dissymétrie sous différentes latitudes ont fait l'objet de nombreux travaux des groupes de Liège et de Paris sous la direction de M. Morand ([1] à [16]).

Des plaques C3 et G5 de 200 et 400 microns ont été exposées verticalement, normalement à la direction N-S, l'E et l'W ainsi que la direction horizontale étant repérés.

Lors du dépouillement, les traces sont définies en direction par les angles α et β, α étant l'angle entre la verticale et la projection sur le plan de la plaque, β l'angle entre la trace et cette projection. La dissymétrie s'exprime par la relation :

$$d = \frac{2\,(N_w - N_E)}{N_w + N_E}$$

où N_E et N_w sont les nombres de traces des secteurs homologues Est et Ouest.

(*) Note présentée en session du 9 novembre 1956, à Liège.

(1) Actuellement au C. E. A. N. 31, rue Belliard, Bruxelles.

(2) Chercheur agréé I. I. S. N.

1.2 — Le groupe de Liège a principalement étudié des événements produits dans des plaques exposées au Congo Belge au voisinage de l'équateur, c'est-à-dire au Karisimbi (4500 m), au Kahuzi (3200 m) et à Bukavu (Costermansville) (1600 m).

Dans le cas des traces isolées, les résultats obtenus par Tsai-Chü ([16]) ont montré que la dissymétrie présente un maximum pour les traces isolées ayant un angle α compris entre 30 et 45°, la dissymétrie étant peu apparente dans les autres secteurs. A l'équateur, ce maximum est de l'ordre de 0,4.

1.3 — Nous avions étudié précédemment la répartition angulaire des projections des branches des étoiles sur le plan de l'émulsion au Karisimbi, et observé une répartition anisotrope due à l'existence de chocs dirigés ([5]).

Nous avons dès lors pensé que la dissymétrie Est-Ouest observée sur les traces isolées devait aussi se marquer dans la répartition des branches rapides des étoiles. Dans cette note, nous étudions cet effet dans les émulsions G5 et C3 exposées au Karisimbi et au Kahuzi.

2) Processus Expérimental

Nous avons continué l'étude de la répartition angulaire des branches des étoiles en choisissant comme lieu principal le Kahuzi, pour lequel nous disposions d'un matériel expérimental plus abondant, principalement en G5.

Nous n'avons conservé, dans la présente étude, que les traces dont l'inclinaison dans l'émulsion vierge était inférieure à 20°.

Le classement des branches en groupes d'énergie a été également amélioré par ce choix, car il est basé sur le comptage de grains, correct uniquement pour les traces peu inclinées. On suppose en outre, pour faire ce classement, que toutes les particules qui sortent des étoiles sont des protons.

D'après les travaux de Cüer et de Combe ([17]), on peut en effet admettre que les deutérons et les tritons énergiques émis, qui sont nombreux pour des énergies incidentes faibles (inférieures à 100 Mév) deviennent rares au-dessus de 300 Mév.

Or la plupart des primaires responsables des étoiles intervenant

dans la statistique étudiée ont des énergies supérieures à ce niveau de 300 Mév.

Nous avons pu classer les traces en trois groupes : le premier correspondant aux traces de particules d'énergie nettement supérieure à 250 Mév, le second aux branches d'énergie comprise entre 250 et 50 Mév, le troisième aux branches d'énergie inférieure à 50 Mév. 600 Etoiles ont été ainsi mesurées ; ce nombre est suffisant pour observer la distribution des traces dans les différents groupes d'énergie.

3) Résultats expérimentaux

3.1 — La répartition des traces d'énergie supérieure à 250 Mév est représentée par secteurs de 20° dans la fig. 1. On peut admettre

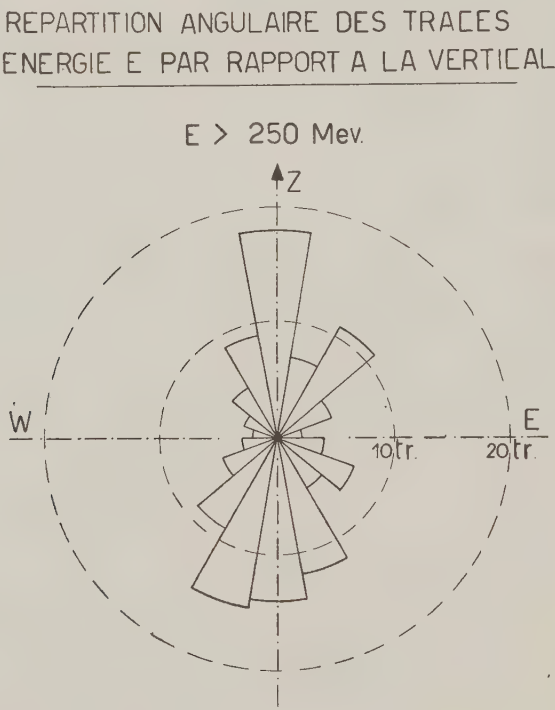


Fig. 1

que les traces des secteurs supérieurs (70 traces observées) sont dues principalement à des particules « primaires » produisant des étoiles et que les traces des secteurs inférieurs (73 traces observées) sont dues aux particules émises.

Dans ces deux cas, la répartition des traces est anisotrope. Plus de 80% se situent dans les secteurs d'ouverture angulaire α compris entre 0° et 50°, 30% dans les secteurs d'α compris entre 0° et 10°, de part et d'autre de la verticale.

3.2 — La répartition des branches d'énergie comprise entre 50 et 250 Mév est représentée sur la fig 2.

Cette répartition est anisotrope, 58 branches se situent au-dessus de l'horizontale, 146 branches en-dessous.

REPARTITION ANGULAIRE DES BRANCHES
D'ENERGIE E PAR RAPPORT A LA VERTICALE

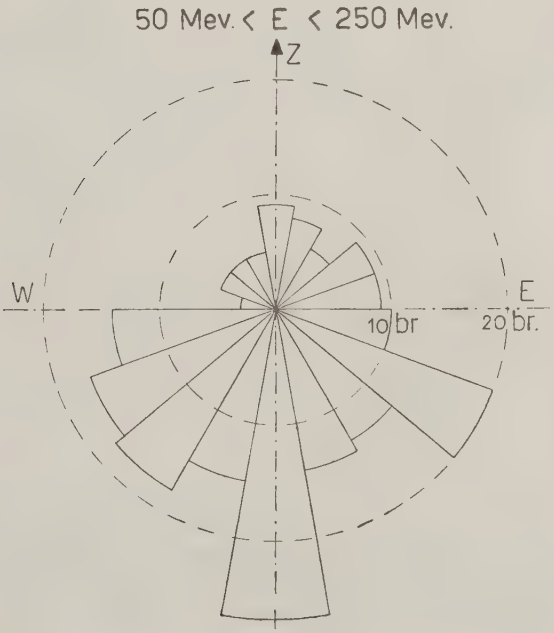


FIG. 2

3.3 — Répartition des branches d'énergie comprise entre 0 et 50 Mév.

Cette répartition présente encore une anisotropie, mais moins marquée que celle des groupes précédents.

4) Analyse des résultats

Nous avons d'abord recherché la dissymétrie comme dans le cas des traces isolées, en comparant le nombre de branches dans des secteurs d'ouverture angulaire de 20° symétriques par rapport à la verticale. Les petits nombres de branches de ces secteurs étant soumis aux fluctuations statistiques, nous n'avons pu de cette façon observer une dissymétrie.

Nous avons dès lors effectué des groupements plus importants et constaté qu'une dissymétrie E-W se marquait dans les secteurs d'ouverture angulaire α compris entre 45° et 135° Est, 45° et 135° Ouest, pour les branches d'énergie comprise entre 50 et 250 Mév.

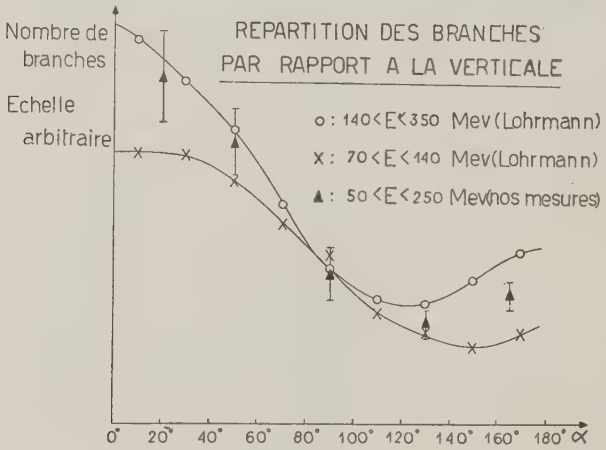


Fig. 3

La répartition angulaire des branches de ce groupe par rapport à la verticale est semblable aux répartitions angulaires, par rapport au même axe, des branches d'énergie comprise entre 140-350 Mév et 70-140 Mév, observées à 2960 m à la Zugspitze par E. Lohrmann [19] comme le montre la figure 3.

La répartition angulaire par rapport à la direction de la particule primaire relative à ces observations est également donnée dans la référence citée.

Par la comparaison de ses mesures avec les résultats de Camerini et al ([19]) (étoiles provenant d'une exposition à 21.000 m) et avec ceux de Bernardini et al ([20]) (étoiles produites par les protons de 350-400 Mév d'un cyclotron), Lohrmann a pu conclure que la distribution angulaire des branches discontinues par rapport à la direction de la particule primaire est indépendante de son énergie.

En séparant les branches par un plan passant par le centre de l'étoile et perpendiculaire à la direction de référence, on remarque que ces diverses répartitions présentent un phénomène de multiplication haut bas du nombre de branches.

Si l'on considère les répartitions par rapport à la verticale, on constate une multiplication égale à 2,1 pour le groupe 140-350 Mév, à 2,4 pour le groupe 70-140 Mév des répartitions de Lohrmann, à 3,1 pour le groupe de 50 à 130 Mév dans une répartition observée par J. Crussard ([21]); dans notre répartition du groupe 50-250 Mév, elle est égale à 2,5.

Ce phénomène est nettement accentué lorsqu'on le considère par rapport à la direction de la particule primaire : la multiplication est égale à 4 pour le groupe 70-350 Mév de Lohrmann; 4,5 pour le groupe 130-280 Mév de Camerini et 10 pour le groupe 40-350 Mév de Bernardini.

En admettant que la dissymétrie maximum a lieu, pour les particules incidentes, dans les mêmes secteurs que pour les traces isolées ($30^\circ < \alpha < 45^\circ$), nous devons constater pour les énergies considérées, à cause du phénomène de multiplication et du fait que la répartition ne dépend pas de l'énergie du primaire, une répartition différenciée des branches du groupe 50-250 Mév dans les secteurs symétriques d'α compris entre $52^\circ30'$ et $127^\circ30'$ (fig. 4). Le plus grand nombre de branches doit se trouver dans le secteur opposé à la direction $\alpha = 37^\circ30'$ des particules venant de l'Ouest.

Appelons B_w ce nombre et B_E celui du secteur symétrique. Dans les émulsions G5 du Kahuzi : $B_w = 46$, $B_E = 35$. La probabilité P d'existence d'une dissymétrie basée sur ces observations est donnée par la probabilité de

$$\frac{B_w}{B_w + B_E} > 0{,}5, \text{ dans ce cas } P = 0{,}8.$$

Nous avons groupé, en plus des premières observations, les résultats obtenus de façon analogue dans des C3 exposées au Kahuzi (nous y observons les traces de protons de 50 jusque 100 Mév) et de G5 du Karisimbi présentant les mêmes caractéristiques que les premières plaques. Nous pouvons ajouter ces derniers résultats du Karisimbi aux résultats précédents, car la répartition des traces discontinues par rapport à la direction de la particule primaire est indépendante de son énergie; les primaires du Karisimbi (4.500 m) ont d'ailleurs à peu près la même énergie que ceux du Kahuzi (3.200 m).

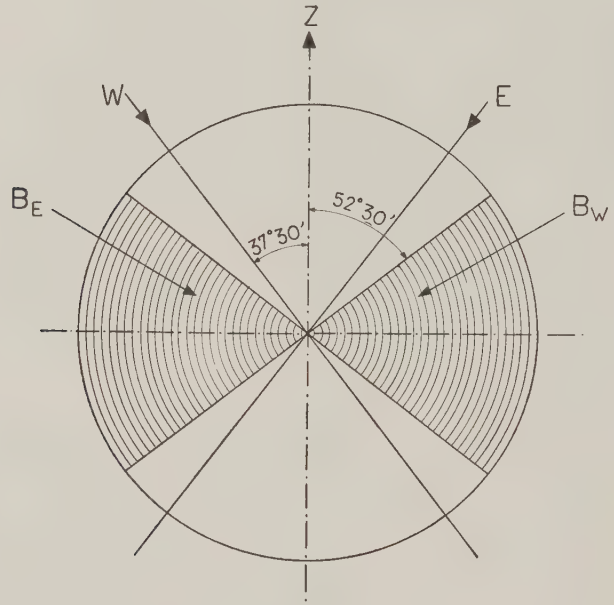


Fig. 4

Nous obtenons alors

$B_w = 83 \quad B_E = 49$, dans ce cas $P = 0{,}99$.

5) Conclusions

Comme les branches de haute énergie ($E > 250$ Mév) sont plus

collimatées par rapport à la direction de la particule incidente que les branches d'énergie inférieure, nous pouvons admettre que la dissymétrie des particules primaires se transmet également dans le groupe des particules émises d'énergie supérieure à 250 Mév.

Pour observer directement la dissymétrie pour ce groupe, il faudrait comparer les nombres de branches dans des secteurs répartis symétriquement par rapport à la verticale comme on l'a fait pour les traces isolées.

Si dans ce cas, on a pu mettre en évidence et mesurer une dissymétrie, il a fallu mesurer un minimum de 3000 traces; vu le nombre plus restreint de branches dont nous disposons, il ne nous est pas possible de mesurer par cette voie la dissymétrie.

Dans le présent travail, par une observation de la distribution des branches de 50 à 250 Mév, c'est-à-dire dans une bande d'énergie où l'émulsion donne un enregistrement précis et facilement observable du phénomène, nous avons montré l'existence de la dissymétrie Est-Ouest dans la répartition des branches de ce groupe.

Laboratoires de Physique Expérimentale (Licence)
et de Physique Générale (Licence)
Université de Liège

BIBLIOGRAPHIE

(1) Max Morand, *C. R. Acad. Sci.* **228**, p. 1488-1490 (1949).
(2) Max Morand, *C. R. Acad. Sci.* **229**, p. 40-42 (1949).
(3) Max Morand, L. Winand, C. Beets, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, n° 4 et 5, (1949).
(4) C. Beets, Max Morand, L. Winand, *C. R. Acad. Sci.* **229**, 1227-1228, (1949).
(5) C. Beets, Max Morand, L. Winand, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, n° 12 (1949).
(6) Max Morand, Supplemento al Volume VI, série IX del *Nuovo Cimento* n° 3 (1949).
(7) Hassan Moucharafyeh, Max Morand, Melle Simone Rebaud, *C. R.* **230**, 834-836, (1950).
(8) Max Morand, Tsai-Chü, *C. R. Acad. Sci.* **234**, 1875-1877 (1952).
(9) Max Morand, Tsai-Chü, *C. R. Acad. Sci.* **235**, 1502-1504 (1952).
(10) Tsai-Chü, Max Morand, *C. R. Acad. Sci.* **236**, 2211-2213 (1953).
(11) Tsai-Chü, Max Morand, *C. R. Acad. Sci.* **237**, 1080-1082 (1953).
(12) Tsai-Chü, Max Morand, *C. R. Acad. Sci.* **237**, 1517-1519 (1953).
(13) Tsai-Chü, Max Morand, *C. R. Acad. Sci.* **239**, 415-418 (1954).
(14) Tsai-Chü, Max Morand, *C. R. Acad. Sci.* **239**, 1786-1788 (1954).

(15) Tsai-Chü, *C. R. Acad. Sci.* **240**, 300-302 (1955).
(16) Tsai-Chü, *Ann. de Phys.* **13**, 291-343, (1956).
(17) Cüer P., Combe J., *C. R. Acad. Sci.* **238**, 1799, (1954).
(18) E. Lohrmann, *Nuovo Cimento*, **10**, 1, 1126-40 (1955).
(19) U. Camerini, J. H. Davies, P. H. Fowler, C. Franzinetti, H. Muirhead, W. O. Lock, D. H. Perkins and G. Yekutieli, *Phil. Mag.* **42**, 1241 (1951).
(20) G. Bernardini, E. T. Booth and S. J. Lindenbaum, *Phys. Rev.* **88**, 1017 (1952).
(21) J. Crussard, *C. R. Acad. Sci.* **233**, 611-613 (1951).

Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Tome 71, n° I, p. 53-60

Sur le mécanisme de dissociation des formes isomères du butène sous l'impact électronique

PAR

L. D'OR, J. C. LORQUET et J. MOMIGNY
Université de Liège (1)

Summary

The metastable transitions, the influence of the energy of the ionising electrons on the relative abundance of the ions and the appearance potentials of several ions in the mass spectrum of the four isomers of the butenes are discussed.

From these data, it is possible to reconstitute the degradation scheme of the molecules under the electronic impact.

Pour expliquer l'apparition des ions présents dans le spectre de masse d'une substance soumise à l'impact électronique, on admet généralement que lors du choc entre la molécule et un électron porteur d'une certaine énergie cinétique, un « complexe activé » au sens de la théorie d'Eyring prend naissance : il s'agit de l'ion moléculaire dans un état excité. L'énergie d'excitation se répartit alors statistiquement sur divers degrés de liberté de la molécule provoquant éventuellement la rupture des liaisons correspondantes. Des ions fragmentaires apparaissent ainsi à la suite d'un ensemble de réactions monomoléculaires de décomposition de l'ion parent, concurrentes ou consécutives, en chaînes divergentes ou convergentes, dont l'ensemble forme un « schéma de décomposition », analogue à ceux que l'on rencontre en cinétique chimique.

Trois genres d'observation sont susceptibles de nous aider à reconstituer un tel schéma :

— la recherche des transitions correspondant à des ions dits « métastables » ;

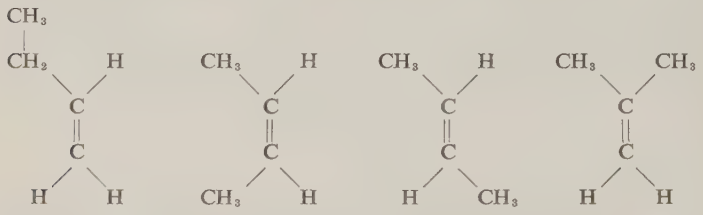
— le relevé des courbes d'abondance relative des ions en fonction du potentiel accélérateur des électrons ;

— la détermination du potentiel d'apparition des ions.

(1) Note présentée en session du 9 novembre 1956, à Liège.

L'utilisation de ces observations nous a permis d'étudier le comportement des isomères du butène au spectromètre de masse.

Le butène C_4H_8 se présente sous les quatre formes isomères suivantes :



Examinons les données que nous apportent chacune des trois méthodes mentionnées.

1) Les ions métastables

On trouve souvent dans un spectre de masse des ions qui apparaissent en général à des nombres de masse nettement différents d'un nombre entier, alors que l'énergie des électrons utilisés exclut la possibilité d'une double ionisation. L'interprétation de ce phénomène a été donnée par Hipple, Fox et Condon. Supposons qu'un ion de masse m_i se décompose au sortir du champ accélérateur en un ion de masse m_f et un radical neutre; l'ion initial reçoit dans la chambre d'ionisation une vitesse déterminée par sa masse m_i, mais c'est un ion de masse inférieure m_f, doué de cette même vitesse, qui est dévié dans le tube à ions. De telle sorte qu'on enregistre un courant ionique correspondant à une masse virtuelle m_v donnée par la relation $m_v = m_f^2/m_i$.

On a donné le nom d'ion métastable à l'ion de masse m_i.

Ainsi, le pic 24,1 que l'on rencontre dans beaucoup d'hydrocarbures s'interprète bien comme étant dû à l'ion métastable $C_2H_4^+$ (28) qui donne lieu à la transition

$$C_2H_4^+ (28) \rightarrow C_2H_2^+ (26) + H_2 (2) \quad \text{avec} \quad m_v = (26)^2/28 = 24{,}14.$$

L'observation de telles transitions métastables est d'un intérêt considérable en vue du but que nous nous proposons. En effet, si, par exemple, l'ion 28 peut se décomposer en un ion 26 dans le

tube du spectromètre, cette décomposition a beaucoup de chances de se produire également dans la chambre à ionisation. Il existe donc une forte présomption que l'ion de masse 26, dont la présence est par ailleurs marquée par un pic normal, soit produit directement aux dépens de l'ion 28, et non pas, ou non pas seulement, aux dépens de l'ion de masse 27, par exemple.

Les quatre butènes présentent les mêmes transitions métastables. Le tableau suivant en donne la liste, avec l'interprétation proposée.

TABLEAU I

m_v observés	Transitions correspondantes	m_v calculés
15,3	$C_4H_7^+$ (55) → $C_2H_5^+$ (29) + C_2H_3 (26)	15,29
24,1	$C_2H_4^+$ (28) → $C_2H_2^+$ (26) + H_2 (2)	21,14
25,1	$C_2H_5^+$ (29) → $C_2H_3^+$ (27) + H_2 (2)	25,13
27,7	$C_4H_7^+$ (55) → $C_3H_3^+$ (39) + CH_4 (16)	27,65
30,0	$C_4H_8^+$ (56) → $C_3H_5^+$ (41) + CH_3 (15)	30,00
31,0	$^{13}C^{12}C_3H_8^+$ (57) → $^{13}C^{12}C_2H_5^+$ (42) + CH_3 (15)	30,94
35,1	$C_3H_3^+$ (39) → C_3H^+ (37) + H_2 (2)	35,10
37,1	$C_3H_5^+$ (41) → $C_3H_3^+$ (39) + H_2 (2)	37,09
38,1	$^{13}C^{12}C_2H_5^+$ (42) → $^{13}C^{12}C_2H_3^+$ (40) + H_2 (2)	38,09
49,1	$C_4H_5^+$ (53) → $C_4H_3^+$ (51) + H_2 (2)	49,07
51,1	$C_4H_7^+$ (55) → $C_4H_5^+$ (53) + H_2 (2)	51,07

On remarque que certains des pics attribués à l'intervention d'ions métastables correspondent à des valeurs entières ou voisines de valeurs entières du nombre de masse. Même lorsque ces pics interfèrent avec des pics normaux, ils peuvent être reconnus comme pics « métastables » par leur profil anormalement large, par la manière dont ils sont influencés par la variation du potentiel accélérateur des électrons, et enfin par l'emploi d'un suppresseur d'ions annexé au collecteur et qui a pour effet d'empêcher les ions provenant d'ions métastables d'atteindre celui-ci.

En ce qui concerne les deux transitions qui font apparaître les pics 38,1 et 31,0, les remarques suivantes doivent être formulées. Plutôt que d'admettre la décomposition d'un ion $C_3H_6^+$ de masse 42 non présent dans le spectre (le pic 42 étant dû uniquement à la contribution isotopique du pic 41), nous supposons qu'il s'agit de la décomposition des ions isotopiques de masse 42 de l'ion $C_3H_5^+$, (ions renfermant, par exemple, un atome de carbone 13

ou de deutérium) donnant l'ion 40 également isotopique de $C_3H_3^+$. Cette transition apparaît donc comme l'équivalent de celle qui donne naissance au pic 37,1. Ajoutons que le rapport des intensités aux masses 38,1 et 37,1 corrobore parfaitement cette hypothèse.

La même explication s'applique à la transition métastable 31,0 : il s'agit de la réplique isotopique de la transition 30,0 suffisamment intense également pour justifier notre hypothèse.

Remarquons enfin que l'ion 39 apparaît par un mécanisme double : il dérive à la fois de l'ion 41 et de l'ion 55. Toutefois, devant le rapport d'intensité des pics métastables correspondants, on peut supposer qu'il est formé en ordre principal à partir de l'ion 41.

En rassemblant ces filiations en un schéma, on obtient la figure 1.

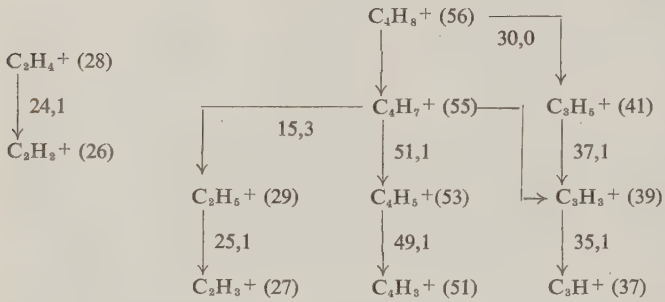


Fig. 1 — Schéma des décompositions mises en évidence par les pics anormaux correspondant à des ions métastables.
(Les nombres indiqués à côté des flèches sont les nombres de masse virtuels observés).

2) Influence du potentiel des électrons

Nous avons déterminé pour chaque ion le pourcentage de l'ionisation totale, c'est-à-dire l'intensité du pic correspondant divisée par la somme des intensités de tous les autres, en fonction du potentiel d'accélération des électrons.

Les spectres de masse des quatre isomères ne présentent que de faibles différences à tous les potentiels, les courbes obtenues sont fort semblables. Nous n'avons représenté que celles relatives au cis-butène 2 (fig. 2 à 5).

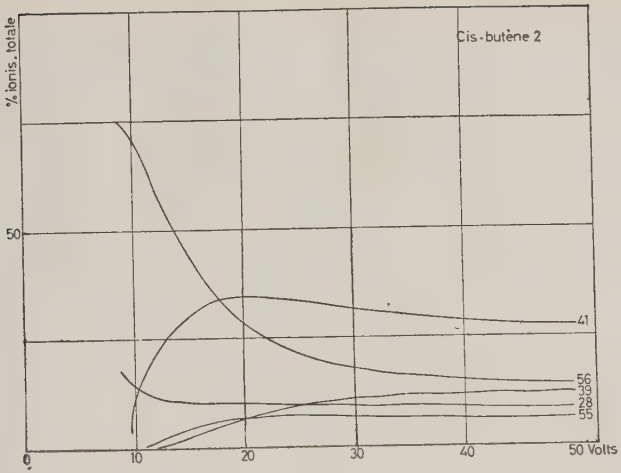


Fig. 2

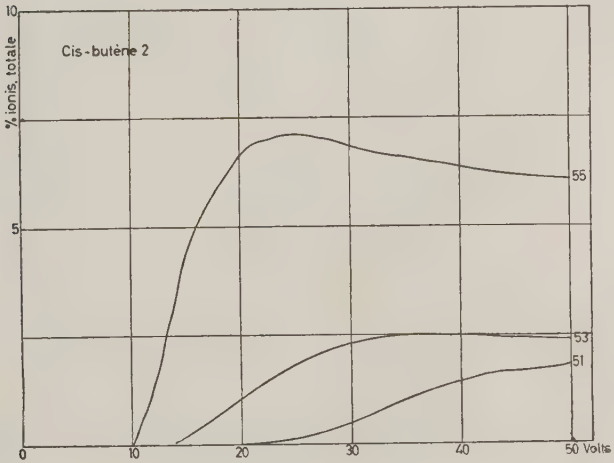


Fig. 3

D'après l'hypothèse de Rosenstock-Eyring, cette influence du potentiel accélérateur des électrons de bombardement peut apporter quelques précisions sur le mécanisme de dissociation de la substance. En effet, si les divers ions fragmentaires sont produits par

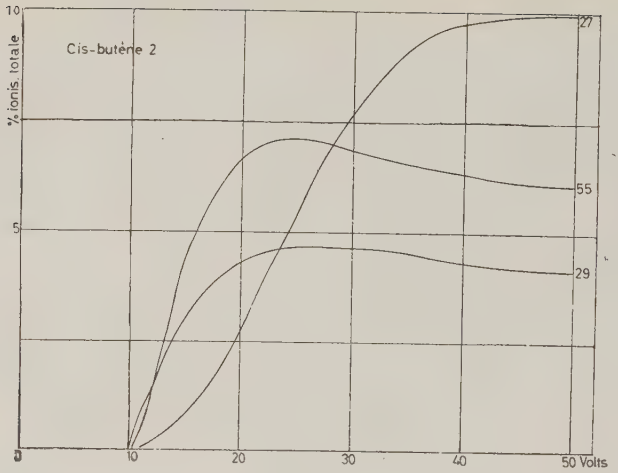


Fig. 4

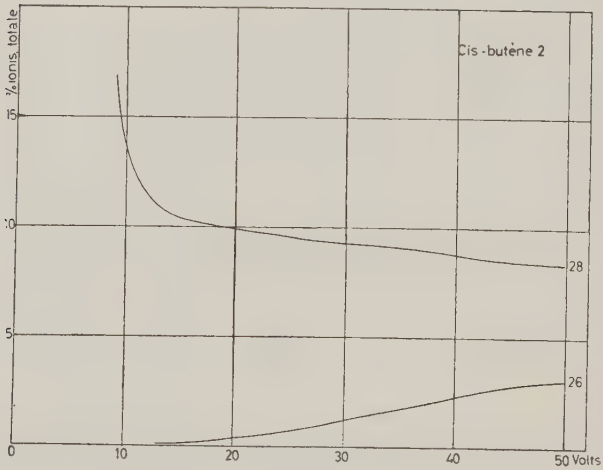


Fig. 5

une succession de réactions de dégradation monomoléculaires, seuls se décomposeront les ions porteurs d'une énergie d'excitation supérieure à certain seuil. En diminuant le potentiel accélérateur, on diminue à la fois le nombre d'ions excités et l'importance de

cette énergie d'excitation. De ce fait, les ions dont la proportion relative augmente seront vraisemblablement ceux qui produisaient les autres, tandis que l'on assistera à une diminution de l'importance relative de ces derniers alors que le potentiel diminue.

Examinons maintenant les courbes expérimentales (*).

Nous avons vu que l'étude des transitions métastables suggérait notamment une filiation $56 \rightarrow 41 \rightarrow 39 \rightarrow 37$.

Il apparaît directement (fig. 2) que l'ion ($C_3H_5^+$) est produit aux dépens de $C_4H_8^+$ (56). De même la courbe relative à l'ion 41 a, de 50 *v* à 20 *v*, une allure d'ion générateur, ce qui s'accorde bien avec la transition $41 \rightarrow 39$.

Quant à l'ion 37, son abondance est trop faible pour que sa courbe puisse être étudiée.

De même, l'ion 55 se décompose en deux suites $55 \rightarrow 53 \rightarrow 51$ et $55 \rightarrow 29 \rightarrow 27$. On voit sur la figure 3 que les ions 55 et 29 sont générateurs jusqu'à environ 24 volts, l'ion produit étant probablement 27 ($C_2H_3^+$). Après 24 volts, l'ion 55 dérivant lui-même de 56, se met à décroître et entraîne les ions 29 et 27 dans sa chute.

Le cas de la filiation $55 \rightarrow 53 \rightarrow 51$ est beaucoup moins net (fig. 4); toutefois la courbe relative à l'ion 53 ($C_4H_5^+$) croît légèrement de 50 à 35 volts. Il est probable que l'ion produit est 51 ($C_4H_3^+$).

Cette méthode d'analyse met très clairement en évidence la transition $28 \rightarrow 26$: les deux courbes apparaissent comme complémentaires tout au moins jusqu'à environ 12 volts.

3) Les potentiels d'apparition

La figure 1, qui rassemble les conclusions de l'étude des ions métastables et des courbes d'abondance, ne nous renseigne pas sur l'origine de l'ion $C_2H_4^+$ (28). Mais les potentiels d'apparition peuvent nous fournir des indications au sujet de cette origine. Ceux-ci ont été déterminés par plusieurs auteurs. Dans le cas du cis et du trans butène 2, le potentiel d'apparition de l'ion

(*) Il convient de faire abstraction de la partie des courbes relatives à des potentiels inférieurs à une dizaine de volts : elle est due à des phénomènes secondaires caractéristiques de la source d'ions utilisée, phénomènes plus complexes que ceux que nous discutons ici.

Voir notamment à ce sujet : J. Momigny, *Bull. Soc. Roy. Sc. Lg.* **3**, 183 (1956).

$C_2H_4^+$ (28) étant inférieur à celui de tous les autres ions fragmentaires, il ne peut dériver que de l'ion moléculaire, par rupture de la double liaison ionisée (celle-ci est fortement affaiblie, puisque c'est un de ses électrons π qui est arraché).

Ce mécanisme est évidemment impossible dans le cas des deux autres isomères : aussi le potentiel d'apparition de l'ion 28 est-il alors considérablement plus élevé. L'ion $C_2H_4^+$ doit alors être produit soit aux dépens de l'ion 55 ($C_4H_7^+$) (dérivant lui-même de l'ion parent par perte d'un hydrogène paraffinique [1]) par rupture de la liaison médiane, soit encore à partir de l'ion 29 ($C_2H_5^+$) par rupture d'une liaison C–H. Son potentiel d'apparition [2] (égal à 12,35 e. v.) étant compris entre celui des ions 55 ($C_4H_7^+$) (P. A. = 11,97) et 29 ($C_2H_5^+$) (P. A. = 13,71), c'est la première hypothèse qui est à retenir. Il pourrait toutefois provenir de l'ion 41 ($C_3H_5^+ = CH_2 — CH — CH_2$) (P. A. = 11,65) en admettant une migration d'hydrogène.

Enfin, dans le cas de l'isobutène, il faut nécessairement faire appel à des migrations intramoléculaires pour expliquer l'origine de l'ion $C_2H_4^+$. Son processus d'apparition est probablement complexe, et il n'est pas possible de préciser à quel niveau de la filiation se produit le ou les réarrangements.

Nous remercions le Fonds National de la Recherche Scientifique pour l'aide financière qu'il a bien voulu accorder à notre laboratoire, l'Institut de Recherche Scientifique Appliquée à l'Industrie et à l'Agriculture, et le Centre National Belge de Chimie physique moléculaire, pour les mandats accordés à deux d'entre nous.

Université de Liège,
Centre de spectrométrie de Masse.

BIBLIOGRAPHIE

(1) D. P. Stevenson, *J. Am. Chem. Soc.* **65**, 209 (1943).
(2) J. J. Mitchell et F. F. Coleman, *J. Chem. Phys.* **17**, 44 (1949).

Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Tome 71, n° I, p. 61-65

Etude du spectre de masse du bromocyclopentane et des trois bromo-n-pentanes

PAR

L. D'OR, H. HEYNS et J. MOMIGNY (*)

Summary

The mass spectra of the bromocyclopentane and of the three bromo-n-pentanes have been studied for various energies of the generating ions. The spectrum analysis from the viewpoint of the peaks corresponding to metastable ions and of the abundance curves of the main ions versus the electron energy, has allowed to propose appearance schemes of the main ions from parent ions and to point out a similitude of behaviour between the cyclic compound and the 1- and 3-bromopentanes.

Nous nous sommes proposé d'étudier, à partir des spectres de masse, les processus de dégradation du bromocyclopentane sous l'effet d'un flux d'électrons monocinétiques, et de comparer ces processus à ceux auxquels donnent lieu les trois bromures du pentane normal.

Produits utilisés. Le bromure de cyclopentyle et le 1-bromopentane du commerce ont été purifiés par distillation à la colonne Todd sous pression réduite et à l'abri de la lumière. Les 2 et 3 bromopentanes du commerce sont des mélanges des deux isomères; d'autre part, leur préparation par bromuration directe des alcools correspondants semble conduire aussi à de semblables mélanges [1] [2] [3] [4]; c'est pourquoi nous avons eu recours à la méthode de Cason et Winans [5], application du procédé de Tipson [6].

$$ROH + Cl-\overset{\overset{O}{\|}}{\underset{\underset{O}{\|}}{S}}-C_6H_4-CH_3 \text{ en solution dans la pyridine} \rightarrow HCl +$$

$$R-O-\overset{\overset{O}{\|}}{\underset{\underset{O}{\|}}{S}}-C_6H_4CH_3 \xrightarrow{NaBr} R\,Br + NaO_3S-C_6H_4CH_3$$

(*) Note présentée en session du 9 novembre 1956, à Liège.

Contrairement aux produits du commerce, les bromures obtenus de cette manière ne présentaient plus aucune des bandes d'absorption infra-rouge caractéristiques de leur isomère.

Spectres de masse. Ils ont été relevés au moyen d'un appareil C. E. C. 21-103 pour une gamme de potentiels d'accélération des électrons allant de 70 à 8,7 volts.

Résultats. 1) Dans tous les cas, les ions bromés, y compris l'ion parent, sont très peu abondants.

L'ion de plus grande masse le plus représenté est celui qui correspond à la perte de l'atome de brome seul, sauf dans le cas du 2 bromopentane, où c'est l'ion correspondant à la perte de HBr.

Corrélativement, l'ion HBr^+ est à peine représenté dans le 2 bromopentane, tandis qu'il l'est de façon non négligeable dans les trois autres substances.

2) De l'étude de l'influence de l'énergie des électrons sur l'abondance des principaux ions, comme de l'interprétation des pics anormaux correspondant à des ions « métastables », il résulte que les ions abondants de masse élevée sus-mentionnés, c'est-à-dire

$C_5H_9^+$ dans le cas du composé cyclique,

$C_5H_{11}^+$ dans le cas des 1 et 3 bromopentanes

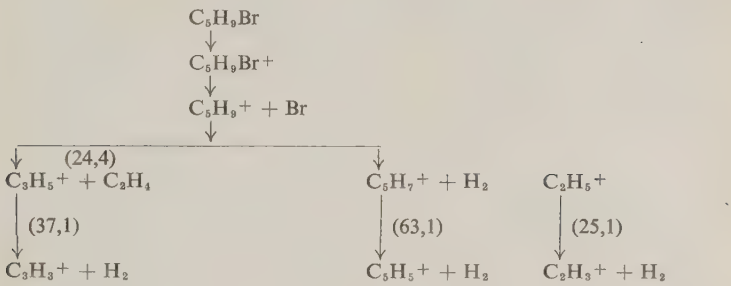
$C_5H_{10}^+$ dans le cas du 2 bromopentane,

semblent jouer un rôle prédominant dans les processus de dégradation; c'est à partir de ces ions que les ions les plus abondants du spectre paraissent être engendrés.

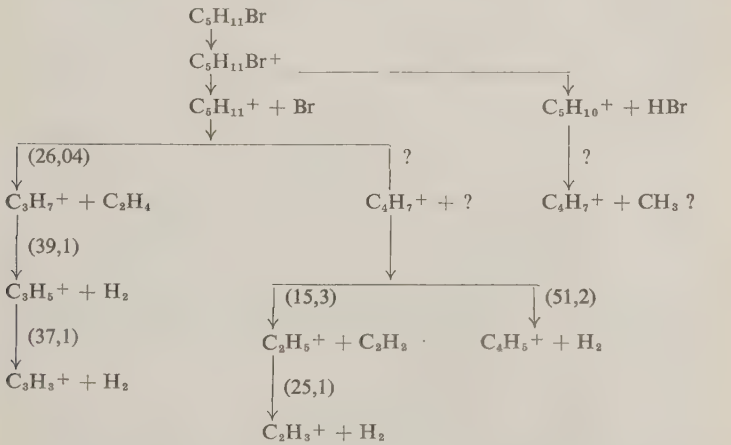
L'ensemble des données obtenues conduisent en effet aux schémas de décomposition suivants (*)

(*) Les chiffres inscrits à côté des flèches représentent les nombres de masse relatifs à des pics anormaux interprétés comme provenant d'ions métastables; la transition indiquée par la flèche constitue l'interprétation de ces pics; ces transitions sont corroborées par les courbes d'abondance des ions en fonction de l'énergie des électrons.

a) *Bromocyclopentane*



b) 1 *bromopentane et* 3 *bromopentane* (**)



Il faut remarquer que la présence de l'ion $C_3H_7^+$, qui est l'ion le plus abondant dans le spectre du 3-bromopentane, ne peut s'expliquer que moyennant l'hypothèse d'un réarrangement

$$(CH_3–CH_2–\dot{C}H–CH_2–CH_3)^+ \longrightarrow (\dot{C}H_2–CH_2–CH_2–CH_2–CH_3)^+$$

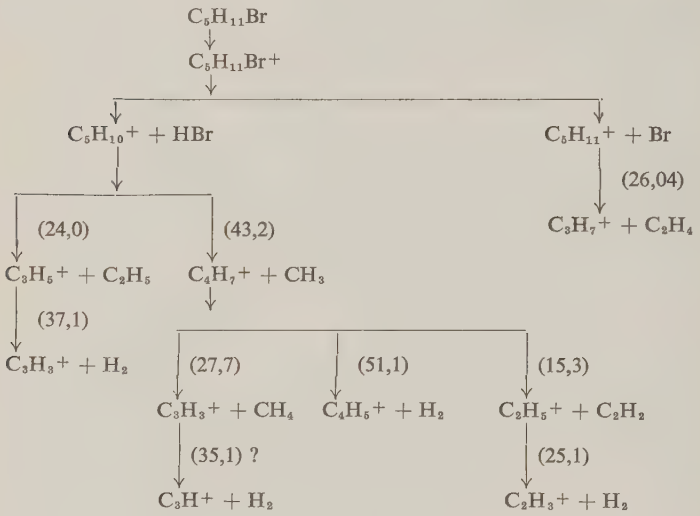
par migration d'hydrogène.

L'ion parent du 3-bromopentane se transformerait donc dans une mesure importante en l'ion parent du 1-bromopentane, ce

(**) Les points d'interrogation marquent de transitions purement hypothétiques, c'est-à-dire qui ne reposent pas sur l'observation de pics anormaux, ni sur la considération des courbes d'abondance.

qui permet d'interpréter l'identité des schémas de décomposition auxquels l'expérience nous conduit.

c) 2 *bromopentane*



L'ion $C_5H_{10}^+$ qui intervient dans le schéma de décomposition doit être un isomère de l'ion parent de l'un des pentènes normaux, vraisemblablement des cis et trans-2 pentènes.

Effectivement, on retrouve dans le spectre du 2-bromopentane tous les pics anormaux correspondant à l'intervention des ions métastables qui apparaissent dans le spectre des deux 2-pentènes (*) (seule l'existence du pic anormal 35,1 qui est présent dans le spectre des 2-pentènes n'est pas certaine dans le 2-bromopentane).

De telle sorte que toute la partie de gauche du schéma ci-dessus relatif au 2-bromopentane semble commune à ce dernier et aux deux 2-pentènes.

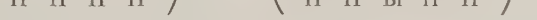
3) La comparaison détaillée des spectres comme des schémas de décomposition ci-dessus, montre une nette parenté entre le comportement du bromocyclopentane et celui des 1- et 3-bromopentanes.

(*) Données du N. B. S.

En particulier, d'une part la répartition de l'abondance des ions en C_3 dans le spectre de ces trois substances est très analogue; d'autre part, l'abondance très grande de l'ion $C_4H_7^+$ (ion prépondérant) dans le spectre du 2-bromopentane (due vraisemblablement à l'apparition d'une liaison double, cf. spectre des 2-pentènes) contraste avec la faible abondance de cet ion et en général des ions en C_4 dans le spectre du bromocyclopentane.

Ce qui conduit à penser que l'ouverture du cycle consécutive à l'ionisation porte de manière tout à fait prépondérante sur les deux liaisons C–C situées dans le voisinage immédiat du brome et sur la liaison C–C opposée au carbone porteur du brome.

Les ions générateurs du spectre du bromocyclopentane seraient, en ordre principal :



ou les ions sans brome correspondants.

Nous remercions le Fonds National de la Recherche Scientifique pour l'aide financière qu'il a bien voulu accorder à notre laboratoire, l'Institut de Recherche Scientifique Appliquée à l'Industrie et à l'Agriculture, et le Centre National Belge de Chimie physique moléculaire, pour les mandats accordés à deux d'entre nous.

BIBLIOGRAPHIE

M. L. Sherill, Belle Otto et L. W. Pichett, *J. A. C. S.* **51**, 3027 (1929).
M. L. Sherill, Baldwin et Haas, *J. A. C. S.* **51**, 3036 (1929).
V. N. Ipatieff, H. Pines et L. Schmerling, *J. org. Chem.* **5**, 253 (1940).
H. Pines, W. D. Hundsman et V. N. Ipatieff, *J. A. C. S* **73**, 4483 (1951).
Cason et Winans, *J. org. Chem.* **15**, 142 (1950).
R. S. Tipson, *J. org. Chem.* **9**, 235 (1944).

Université de Liège,
Centre de spectrométrie de Masse.

Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Tome 71, n° I, p. 66-71

Comportement du fluorobenzène et du paradeutérofluorobenzène sous l'impact électronique

PAR

J. MOMIGNY (*)

Introduction

Nous avons consacré une étude au comportement sous l'impact électronique des dérivés monohalogénosubstitués du benzène (1)

Dans le but d'approfondir les renseignements déjà fournis par ce travail et de vérifier si l'absence d'effet isotopique dans les molécules aromatiques, signalée par Mohler et Dibeler (2) s'étendrait à un hydrocarbure aromatique substitué par un hétéroatome, nous avons entrepris de comparer entre eux les spectres de masse du fluorobenzène et du paradeutérobenzène.

Partie expérimentale

Un échantillon de fluorobenzène ordinaire et un échantillon de p-deutérofluorobenzène contenant quelques pourcents de fluorobenzène ordinaire ont été préparés dans un grand état de pureté.

Les spectres de masse des deux substances ont été corrigés pour les abondances isotopiques naturelles du ^{13}C et du D.

Dans la détermination du spectre de masse du deutérofluorobenzène, il a été tenu compte de la présence de 8,6% de fluorobenzène ordinaire dans l'échantillon de fluorobenzène deutéré obtenu.

Enfin les conditions de la détermination des spectres de masse ont été :

a) Appareil employé : Modèle 21.103 de la C. E. C.

b) Intensité du courant dans l'électroaimant : 0,540 ampères.

(*) Travail publié sous les auspices de l'Institut pour l'encouragement de la Recherche scientifique dans l'Industrie et l'Agriculture, et présenté en session du 9 novembre 1956, à Liège.

(1) J. Momigny, *Bull. Soc. Chim. Belges*, n° 64, pp. 144-165, 1955.

(2) F. Mohler and H. Dibeler, *Journal Res. N. B. S.* **48**-3 (1954).

c) Potentiel accélérateur des électrons : 50 volts.
d) Potentiel accélérateur des ions : 4800 à 500 volts.
e) Emission électronique : 10 micro-ampères.

Faits expérimentaux. Discussion

a) *Effet isotopique*

Comme on l'a signalé dans l'introduction et comme nous l'avons mis en évidence dans une revue récente de la question [1], la substitution du deutérium à l'hydrogène dans les molécules hydrocarbonées y donne lieu à un effet appelé « effet isotopique ».

Celui-ci se manifeste par une augmentation de probabilité de rupture des liaisons carbone-hydrogène par rapport à la probabilité de cette rupture dans la molécule non-deutérée, et par une diminution corrélative de la probabilité de rupture des liaisons carbone-deutérium.

Cet effet, très général dans le cas des hydrocarbures aliphatiques ne se manifeste plus dans le cas des molécules aromatiques telles que le benzène et le naphtalène.

Il devenait dès lors intéressant d'étudier le cas d'une molécule aromatique substituée par un hétéro-atome.

Dans le cas choisi, *il faut admettre que l'effet isotopique est nul ou tout au moins de l'ordre de grandeur des erreurs expérimentales.*

A quoi faut-il attribuer le comportement particulier des dérivés aromatiques deutérés?

Les auteurs [2] qui l'ont étudié les premiers suggéraient que l'absence d'effets isotopiques dans le cas présent paraissait être dû à un réarrangement profond des atomes d'hydrogène autour du cycle benzénique lors de la formation de l'ion moléculaire excité.

Comme la suite de cet exposé le montrera, cette explication ne semble pas devoir être retenue; les phénomènes de réarrangement paraissent limités à l'apparition de certains types d'ions seulement.

En conclusion, si la non-existence d'un effet isotopique dans les molécules aromatiques est confirmée par notre étude, il paraît momentanément difficile d'en fournir une explication cohérente.

[1] J. Momigny, *Industrie chimique belge*. Tome XXI, n° 2, pp. 101-110.
[2] F. Mohler and Dibeler, déjà cités.

b) *Mécanisme d'apparition des ions. Réarrangements*

L'existence dans un spectre de masse de nombreuses transitions métastables et l'étude de la variation des abondances ioniques en fonction du potentiel accélérateur des électrons permet fréquemment de préciser certaines étapes de la décomposition des molécules sous l'impact électronique [1].

Cette voie n'est pas accessible dans le cas du fluorobenzène car aucune transition métastable n'est décelable dans son spectre de masse et une étude de l'influence du potentiel accélérateur des électrons sur les abondances ioniques montre que seul l'ion-parent décroît pour des valeurs croissantes du potentiel accélérateur des électrons.

On pourrait en conclure qu'au moins tous les chefs de file des groupes d'ions sont formés par des réactions de décomposition concurrentes de l'ion-parent.

1) *Ions en* $C_6H_mF^+$ *et* $C_6H_m^+$

En ce qui concerne ces ions, il n'y a pas d'obstacle à l'hypothèse que leur état excité garde la structure d'un cycle.

Il est à remarquer néanmoins que la seule interprétation cohérente du spectre de masse des ions en $C_6H_mF^+$ conduit à admettre un mécanisme en chaîne tel que :

$$C_6H_mF^+ \rightarrow C_6H_{m-1}F^+ \rightarrow C_6H_{m-2}F^+ \ldots \rightarrow C_6H_{m-5}F^+$$

tandis que dans le cas des ions en $C_6H_m^+$, il semble que ce mécanisme soit une série de réactions concurrentes telles que

$$C_6H_m^+ \begin{cases} \longrightarrow C_6H_{m-1}^+ \\ \longrightarrow C_6H_{m-2}^+ \\ \dashrightarrow C_6H_{m-5}^+ \end{cases}$$

2) *Ions en* $C_4H_mF^+$, $C_4H_m^+$, $C_3H_mF^+$, $C_3H_m^+$

Dans le travail auquel nous avons fait allusion dans l'introduction, nous avions été amené, dans le but d'interpréter les variations d'abondance des différents groupes d'ions, à postuler l'existence d'ions moléculaires du type caténiforme, tels que

$$(CX = CH - CH = CH - CH = CH)^+$$

[1] J. Momigny, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège* (3) 1956.

Si nous considérons la formule du fluorobenzène-deutéré où les liaisons carbone-carbone sont numérotées de 1 à 6, on voit qu'il existe trois types distincts d'ions caténiformes suivant que la liaison rompue présidant à leur production est une liaison 1, 2 ou 3.

Soient : rupture 1 — $(\overset{6}{C}F = \overset{5}{C}H - \overset{4}{C}H = \overset{3}{C}D - \overset{2}{C}H = CH)^+$
(type I)

2 — $(\overset{1}{C}H = \overset{6}{C}F - \overset{5}{C}H = \overset{4}{C}H - \overset{3}{C}D = CH)^+$
(type II)

3 — $(\overset{2}{C}H - \overset{1}{C}H - \overset{6}{C}F = \overset{5}{C}H - \overset{4}{C}H = CD)^+$
(type III).

a) *Apparition des ions en* $C_4H_mF^+$ *et* $C_4H_m^+$

Si l'on considère que c'est aux dépens de ces radicaux-ions excités que se produisent les ions en $C_4H_3F^+$, on voit que si toutes les ruptures du cycle qui conduisent aux types (I) (II) (III) sont également probables, l'apparition d'ions en $C_4H_2DF^+$ se fera aux dépens des types (I) et (III) seulement, ce dernier fournissant alternativement un ion $C_4H_2DF^+$ et un ion $C_4H_3F^+$.

Le type (II) fournit seulement des ions $C_4H_3F^+$.

On doit s'attendre à ce que le rapport de l'abondance des ions $C_4H_3F^+$ présents dans le composé deutéré et des ions $C_4H_2DF^+$ soit égal à l'unité.

En fait le rapport expérimental diffère de ce chiffre idéal puisqu'il est égal à $0{,}59 \pm 0{,}04$.

Est-ce à dire que l'on doive abandonner l'hypothèse de l'existence en proportions égales des trois ions moléculaires excités (I) (II) (III)? Il nous paraît en tous cas qu'elle doive être considérée avec circonspection. Serait-elle exacte, il n'en resterait pas moins que la présence du fluor dans les types (I) (II) et (III) puisse modifier dans une certaine mesure la fréquence avec laquelle les liaisons (1) et (5) (dans le type III notamment) sont rompues et influencent ainsi la valeur du rapport $I_{C_4H_3F^+}/I_{C_4H_2DF^+}$.

Quant à admettre qu'un certain pourcentage de ces ions soient réarrangés avant l'apparition des ions en $C_4H_m^+F^-$ ou C_4H_m, il semble que cela soit difficile.

En effet, aux dépens des trois types, on peut prévoir que tous les ions en $C_4H_4^+$ seront des ions deutérés.

Expérimentalement, il en est bien ainsi et dans le cadre des erreurs expérimentales, l'abondance des ions $C_4H_4^+$ du fluorobenzène est exactement égale à celle des ions $C_4H_3DF^+$ dans le fluorobenzène deutéré.

b) *Apparition des ions en* $C_3H_mF^+$ *et* $C_3H_m^+$

Ces ions apparaissent normalement par rupture de la liaison centrale dans les types (I) (II) (III) d'ions moléculaires excités.

On s'aperçoit qu'en l'absence de réarrangements d'hydrogène, tous les ions en $C_3H_2F^+$ seront exempts de deutérium, tandis que tous les ions $C_3H_3^+$ seront en fait deutérés et répondront à la formule $C_3H_2D^+$.

En fait, l'étude du fluorobenzène deutéré montre que l'abondance de ces ions au sein de la molécule deutérée se répartit comme suit :

C_3HDF	1/3	$C_3H_3^+$	1/3
C_3H_2F	2/3	$C_3H_2D^+$	2/3

La situation s'explique facilement si l'on admet que les trois ions moléculaires ont la même probabilité d'apparition mais que préalablement à la formation des ions en $C_3H_m^+$ et $C_3H_mF^+$ le type (I) se réarrange en (I′).

$$(CF = CH - CD = CH - CH = CH)^+ \quad (I').$$

Cette hypothèse, bien qu'elle demande à être vérifiée par de plus amples expériences, rend compte à merveille des proportions trouvées pour les ions réarrangés en $C_3H_m^+$ et $C_3H_mF^+$; en effet, le même réarrangement dans le type (II) n'apporte aucune modification à la situation, et il est difficile d'admettre que l'atome de fluor et l'hydrogène le plus voisin puissent intervertir leur place dans le type III.

Conclusions

1) L'étude comparative des spectres de masse du fluorobenzène

et du p.deutérofluorobenzène confirme que les effets isotopiques sont dans le cas de ce dérivé halogéno-benzénique, aussi inexistants que dans le deutéro-benzène et les deutéro-naphtalènes.

2) En ce qui concerne le mécanisme d'apparition des ions dans ce cas, la présente étude apporte quelques précisions aux positions prises lors d'une première étude des dérivés monohalogéno-substitués du benzène.

3) Elle permet de montrer que l'égalité des probabilités de rupture d'une première liaison carbone-carbone du fluorobenzène doit être considérée avec circonspection, et qu'en tout état de cause la présence du fluor modifie sérieusement les indices de liaison dans l'ion-moléculaire excité.

4) Enfin, la prise en considération d'ions moléculaires excités du type caténiforme qui avait déjà permis de rendre compte des variations d'abondance relative des ions de condensations en carbone différentes, permet moyennant l'intervention d'un réarrangement d'atomes d'hydrogène de rendre compte du mécanisme d'apparition des ions en $C_3H_mF^+$ et $C_3H_m{}^+$.

Il nous est particulièrement agréable de remercier ici Monsieur le Professeur L. D'Or pour l'attention et l'intérêt agissant qu'il porte à nos travaux.

Que l'I. R. S. I. A. trouve ici l'expression de nos remercîments pour l'aide fournie au Centre de Spectrométrie de Masse auquel nous avons l'honneur d'être attaché.

Liège, le 17.I.1957.
Centre de Spectrométrie de Masse
de l'Université.

(29528) Imprimerie Ceuterick, s. c., 66, rue Vital Decoster, Louvain
Resp. L. Pitsi, 25, rue Dagobert, Louvain

Revue des Questions Scientifiques

Cette revue, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de cinq séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891); la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901); la **troisième**, 30 volumes (1902-1921); la **quatrième**, 30 vol. (1922-1936) La livraison de janvier 1937 inaugura la **cinquième série.**

La revue fut interrompue par la guerre, après le deuxième fascicule, avril 1940, du tome 117 de la collection. Ce tome fut achevé par les fascicules de février et juillet 1946.

Depuis 1947, paraît chaque année un volume, en quatre fascicules d'environ 160 pages chacun, 20 janvier, 20 avril, 20 juillet, 20 octobre.

Depuis 1947 la Revue est aussi l'organe de l'UNION CATHOLIQUE DES SCIENTIFIQUES FRANÇAIS.

Administration et Rédaction: **11, rue des Récollets, Louvain** (Belgique).

PRIX D'ABONNEMENT

Belgique, Congo-Belge et Grand-Duché de Luxembourg	**200 francs belges**
abonnement de soutien	**500 francs belges**
abonnement d'honneur	**1000 francs belges**
France et Union française (s'adresser à la librairie Masson, 120, boulevard St. Germain, Paris 6e) . . .	**1800 francs franç.**
Autres pays (s'adresser au Secrétariat, à Louvain)	**280 francs belges**

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

EXTRAIT DU CATALOGUE

ANNALES DE LA SOCIETE SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

t. I à XLVI, 1875 à 1926. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages . . F 150,00

ANNALES DE LA SOCIETE SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

Série A (sc. mathématiques), t. XLVII à LVI (1927 à 1936) . . . . . F 70,00
Série B (sc. physiques et naturelles) » » » F 70,00
Série C (sc. médicales) (1927 et 1928) F 100,00 — (1929 à 1933) (1931 à 1936) F 40,00
Série D (sc. économ. et techniques) (1927 à 1929) F 20,00 — (1930) F 60,00
(1931 à 1936) F 100,00
Série I (sc. mathématiques et physiques), tt. LVII à LXIX (1937 à 1953) F 70,00
t. LXVIII à LXX (1954 à 1956) F 100,00
Série II (sc. naturelles et médicales), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) F 70,00
Série III (sc. économiques), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) . . . . . F 100,00

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES,

t. I à XCII (1877 à 1927). Les deux volumes annuels . . . . . F 200,00
Le fascicule trimestriel . . . . . F 60,00
t. XCIII à CXVI (1928 à 1939). Les deux volumes annuels . . . . F 200,00
Le fascicule . . . . . F 40,00
t. CXVII (1940 et 1946), tt. CXVIII à CXXVII (1947 à 1956). Le volume F 200,00
Le fascicule . . . . . F 60,00

TABLES ANALYTIQUES DES ANNALES,

t. I à XXV (1875 à 1901) . . . . . F 20,00
t. XXVI à XLVI (1902 à 1926) . . . . . F 40,00

TABLES ANALYTIQUES DE LA REVUE,

t. I à L (1877 à 1901). . . . . F 20,00
t. LI à LXXX (1902 à 1921) . . . . . F 20,00
t. LXXXI à CX (1922 à 1936) . . . . . F 30,00

MONOGRAPHIES DE SCIENCES NATURELLES

I — **B. Tougarinoff.** Les réactions organiques dans l'analyse qualitative minérale (cations). — Un vol. in-8° de 107 pages (1930) : en Belgique, F 24,00; autres pays : F 30,00.

II — **V. Schaffers.** Le paratonnerre et ses progrès récents. Un vol. in-8° de 90 pages (1931) : en Be gique, F 24,00; autres pays : F 30,00.

IV — **F. Kaisin** et **E. de Pierpont.** — Hydrogéologie des Calcaires de la Belgique. Un vol. in-8° de 111 pages, avec 35 fig. et un plan hors texte (1939) : en Belgique, F 24,00; autres pays, F 30,00.

MONOGRAPHIES MEDICALES

I — **M. Schillings.** Le rein en fer à cheval. Un vol. in-8° de 104 pages, avec 8 planches hors-texte (1938) : en Belgique, F 70,00; autres pays, F 90.00.

III — **P. Van Gehuchten.** La pathologie du système pallido-strié. Un vol. in-8° de 52 pages, avec 8 planches hors-texte (1930) : en Belgique, F 24,00; autres pays, F 30,00.

MONOGRAPHIES DES SCIENCES ECONOMIQUES

I — **A. Henry.** La structure technique de l'agriculture belge et ses particularités en Wallonie et en Flandre. Un vol. de 66 pages . . . . . F 20,00

II — **A. Henry.** Les variations régionales de l'Agriculture en Belgique. Un vol. de 50 pages . . . . . F 10,00

III — **A. Delpérée.** La réglementation conventionnelle des conditions de travail en Belgique. Un vol. de 200 pages . . . . . F 60,00